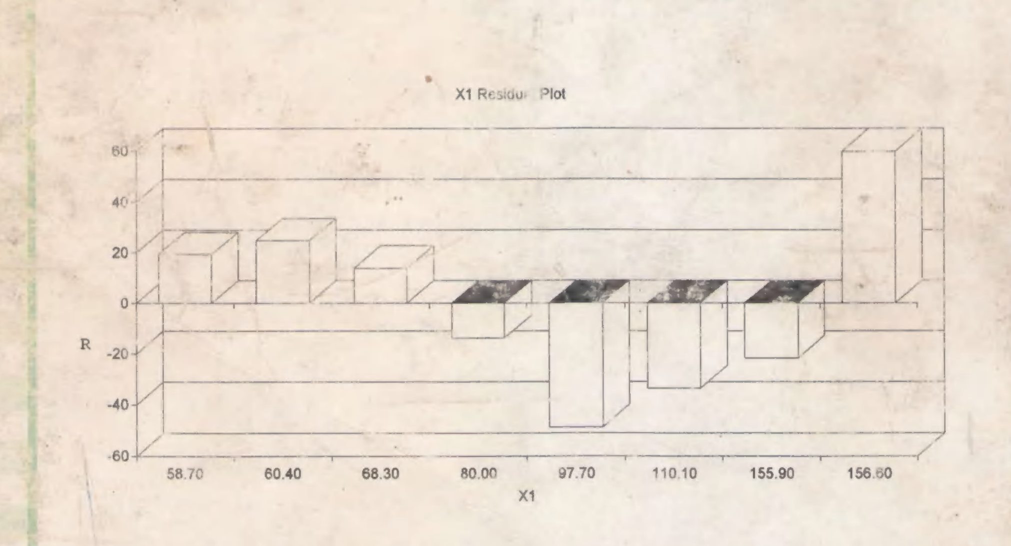
الدكتور عبد الرزّاق شُرْبجي

الاقتصاد القياسي التطبيقي

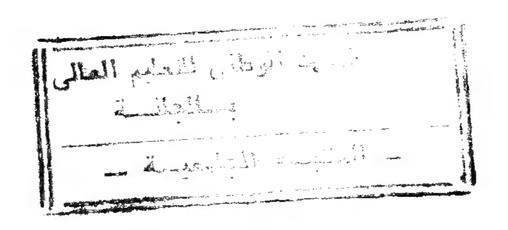
تطبيقات على اقتصاديّات الدول العربيّة باستخدام

EXCEL 4.1 , QUATRO - PRO
DBASE III PLUS & SPSS/ PC +



=TRANSPOSE(B4:C8)

=MINVERSE($B$16:$C$17)



مقدمة

كثيراً ما يحدث أن تدخل إلى معرض لبيع الآلات الحاسبة الإلكترونية (الكمبيوتر) فيسألك رجل المبيعات أن تجلس إلى جانب إحدى الآلات لتجرّبها وتضغط على بعضٍ من مفاتيحها، فتحرّك يدك أو رأسك وأنت تغادر المكان مشيراً بذلك إلى ضيق الوقت، فتغادر المكان وكُلّك خوفٌ دفين من محاولة الفشل أمام الآخرين وأنت تجرّب أي شيء جديد. نعم، كثيراً ما تضطر إلى مغادرة معارض الكمبيوتر وأنت تنظر إلى الآخرين يلعبون على هذا الجهاز نظرةَ بُؤسٍ وربما حَسَدٍ، فأنت تعلم أن الكمبيوتر قد وُجِدَ ليبقى لكنك تخشى المحاولة، فترفض الجديد لأنك تجهله.

لذلك رأيت في هذه الطبعة الجديدة من كتابي، وتماشياً مع متطلبات العصر الحديث، أن أُوفّر الوقت والجهد على الباحثين بشكلٍ عام وعلى الاقتصاديين بشكل خاص من خلال ربط الاقتصاد القياسي التطبيقي بالواقع وذلك بعرضٍ موجز لكيفية التعامل مع أنظمة الكمبيوتر: (Excel, Quatro-Pro, Dbase III + & SPSS/PC +) فأرفقت مع هذا الكتاب قرصاً (Disk) يتضمن جميع الأمثلة الواردة فيه بشكلٍ يمكّن القارىء من استخدام أحد الأنظمة (Computer Softwares) الآنفة الذكر في تطبيقات الاقتصاد القياسي.

أما فيما يتعلق باستخدام (Dbase III +) في إدخال البيانات ومن ثم ربطه بالنظام الإحصائي (SPSS/PC +) المستخدم في تحليل البيانات فباستطاعة القارىء العودة إلى كتاب المؤلف والصادر عن دار العلم للملايين عام ١٩٩٠ تحت عنوان: «البحث العلمي واستخدام برامج الكمبيوتر الجاهزة Dbase III + & SPSS/PC+ ».

ونظراً للتشابه الكبير بين النظامين (Excel) و (Quatro-Pro) لذلك سأقوم

هنا باستعراض سريع لكيفية التعامل مع جداول العمل (Work Sheets) والمعروفة باسم (Spread Sheets) والتي تتكون من صفوفٍ (Rows) وأعمدة (Columns).

لقد عرف رجل الأعمال هذه الجداول واستخدمها في تسجيل كل ما يتعلق بعمله وحساباته منذ أكثر من قرن، وكان تعامله معها بطيئاً وصعباً. أما اليوم فإننا نتعامل بالجداول ذاتها لكن بطريقةٍ سهلةٍ وسريعةٍ لأن هذه الجداول أصبحت إلكترونية، حيث تلعب ذاكرة الكمبيوتر (Main Memory) ذات الدور الذي كانت تلعبه الدفاتر والجداول في الطرق التقليدية القديمة البالية، وتقوم شاشة الكمبيوتر (Monitor-Screen) بدور النافذة التي تمكّننا من رؤية الجداول، في حين يلعب لوح المفاتيح (Key Board) دور القلم في تسجيل القيود.

يتكون الجدول (Spread Sheet) في نظام (Excel) من صفوف مُرقمةٍ من 1 إلى 16384 ومن 256 من الأعمدة مُرمّزة من A إلى Z ومن A A إلى A Z وهكذا حتى نصل إلى I V.

يُعطي تقاطع الصف مع العمود ما يُعرف بالخلية (Cell)، لذلك تُعرَّف كل خلية برمز العمود وبرقم الصف الذي تنتمي إليه. فالخلية A1 تعني الخلية الناتجة عن تقاطع العمود (A) مع الصف (1)، في حين أن B 9 تعني الخلية الناتجة عن تقاطع العمود (B) مع الصف التاسع (9). وتُعرَّف الخلية عادة بشكل مطلق أو بشكل نسبي: (A Cell may be referred to in either absolute or relative sense)

ولتوضيح ما سبق ذكره عليك الآن أن تختار (New) من الخيار (File) فتحصل على جدول شبيه بالجدول (أ).

الجدول (أ)

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					

ـ **حرِّك المؤشّر إلى أن تصل إلى الخلية** B2 واكتب 1، اضغط على المفتاح (Right Arrow) واكتب 2، اضغط على المفتاح (Right Arrow) واكتب 3، اضغط على

المفتاح (Right Arrow) واكتب 4 في الخلية E 2، ثم اضغط على المفتاح (Enter).

ـ اكتب المعادلة B2 + 1 = ضمن الخلية B3والتي تطلب فيها أن تكون قيمة الخلية B3 مساويةً لقيمة الخلية B2 مضافاً إليها واحد.

ـ اتبع الأسلوب نفسه المبيَّن أعلاه لتكوّن جدولاً شبيهاً بالجدول (ب).

الجدول (ب)

	A	B	C	D	E
1					
2		1	2	3	4
3		=B2+1			
4					
5					
6		1	2	3	4
7		=$B$6+1			
8					
9					
10		1	2	3	4
11		=B$10+1			
12					
13					
14		1	2	3	4
15		=$B14+1			
16					

يُلاحظ في الجدول (ب) أننا استعملنا الإشارة $ في مواقع مختلفة، علماً أن وضع الإشارة $ قبل العمود تجعل من ذاك العمود مرجعاً مطلقاً (Absolute Refer-ence) فلا يتغير العمود عند نسخ (Copy) محتويات الخلية إلى الخلايا المجاورة كما هو مبين في المدى (Range) من B15 إلى E16 (B15: E16) من الجدول (ج). أما إذا وُضعت الإشارة $ قبل الصف فإنها تجعل الصف مرجعاً مطلقاً كما هو مبيّن في المدى (B11: E12) من الجدول (ج).

الجدير بالذكر أن وضع الإشارة $ قبل الصف وقبل العمود تجعل الخلية مرجعاً مطلقاً فلا تتغير محتويات الخلية على الإطلاق عند نسخ محتويات هذه الخلية إلى الخلايا المجاورة كما هو مبيّن في المدى (B7: E8) من الجدول (ج).

الجدول (ج)

	B	C	D	E
1				
2	1	2	3	4
3	=B2+1	=C2+1	=D2+1	=E2+1
4	=B3+1	=C3+1	=D3+1	=E3+1
5				
6	1	2	3	4
7	=$B$6+1	=$B$6+1	=$B$6+1	=$B$6+1
8	=$B$6+1	=$B$6+1	=$B$6+1	=$B$6+1
9				
10	1	2	3	4
11	=B$10+1	=C$10+1	=D$10+1	=E$10+1
12	=B$10+1	=C$10+1	=D$10+1	=E$10+1
13				
14	1	2	3	4
15	=$B14+1	=$B14+1	=$B14+1	=$B14+1
16	=$B15+1	=$B15+1	=$B15+1	=$B15+1
17				
18				

الجدول (د)

	B	C	D	E
2	1	2	3	4
3	2	3	4	5
4	3	4	5	6
5				
6	1	2	3	4
7	2	2	2	2
8	2	2	2	2
9				
10	1	2	3	4
11	2	3	4	5
12	2	3	4	5
13				
14	1	2	3	4
15	2	2	2	2
16	3	3	3	3

انتخب (Select) الخيار (Copy) من بين الـ (Edit) ثم حدّد المدى الذي ترغب أن تنسخ محتويات الخلية إليه على النحو الآتي :

ـ اضغط (Press) على المفتاح (Shift)وأبقِ إصبعك عليه (Hold) بينما تحرك

المفتاح (Righth Arrow) والمفتاح (Down Arrow) أو استخدم الفأرة (Drag The Mouse) في تحديد المدى (C3: E4).

- انتخب الخيار (Paste) من بين الـ (Edit)أو انتخب الخيار (Fill Right) و (Fill Down) من بين الـ (Edit) واضغط على المفتاح (Enter) فتجد على شاشة الكمبيوتر جدولاً شبيهاً بالجدول (ج).

- انتخب الخيار (Display) و (Formula) من بين الـ (Option) فتحصل على الجدول (د).

- اتبع الأسلوب نفسه في ملء المدى (C7:E8)، والمدى (C11: E12) والمدى (C15: E16).

توضّح الجداول (هـ) و(و) و(ز) جزءاً من الطرق الأربع المستخدمة في القرص (المرفق) لتحليل المثال في الصفحة (80) من الكتاب باستخدام نظام (Excel) على النحو الآتي:

الجدول (هـ)

طريقة المربعات الصغرى باستخدام (Tools-Analysis)

C = F (Y)

Y	C
791	684
848	786
1122	965
1266	1032
1300	1190

Regression Statistics

Multiple R	0.967665553
R Square	0.936376623
Adjusted R Square	0.915168831
Standard Error	58.33729401
Observations	5

Analysis of Variance

	df	*Sum of Squares*	*Mean Square*	*F*	*Significance F*
Regression	1	150261.4804	150261.4804	44.15247999	0.006945673
Residual	3	10209.71962	3403.239873		
Total	4	160471.2			

	Coefficients	*Standard Error*	*t Statistic*	*P-value*	*Lower 95%*	*Upper 95%*
Intercept	52.9806903	134.7475935	0.393184687	0.714238904	-375.846693	481.8080736
x1	0.824497193	0.124082813	6.644733252	0.002662898	0.429609933	1.219384453

Observation	*Predicted Y*	*Residuals*
1	705.1579702	-21.15797017
2	752.1543102	33.84568981
3	978.0665411	-13.06654114
4	1096.794137	-64.79413697
5	1124.827042	65.17295846

الجدول (و)

طريقة المربعات الصغرى باستخدام الوحدات المعيارية

	A	B	C
1			
2			
3			
4			C
5			684
6			786
7			965
8			1032
9			1190
10			
11			*=SUM(C5:C10)*
12			
13	*MEAN of Y*		
14	*MEAN of C*		=AVERAGE(C5:C9)
15			
16	*Sy =*		
17	*Sc =*		=STDEVP(C5:C9)
18			
19	*Bo =*		=($E$11/(COUNT(C5:C9))
20	*B1 =*		=$I$11/$G$11
21			
22	*r =*		=$I$11/(SQRT($G$11*H
23	*r ² =*		=$C$22^2
24			
25	*Standard error*		
26			
27	*1st method*		
28			
29	*F test =*		=($C$23/1)/((1-$C$23)/(
30			
31	*T test =*		=$C$20/SQRT($E$25)

	D	E	F
1			
2			
3			
4	Y	Zc	Zy
5	791	=(C5-$C$14)/$C$17	=(D5-$D$13)/$D$16
6	848	=(C6-$C$14)/$C$17	=(D6-$D$13)/$D$16
7	1122	=(C7-$C$14)/$C$17	=(D7-$D$13)/$D$16
8	1266	=(C8-$C$14)/$C$17	=(D8-$D$13)/$D$16
9	1300	=(C9-$C$14)/$C$17	=(D9-$D$13)/$D$16
10			
11	*=SUM(D5:D10)*	*=SUM(E5:E10)*	*=SUM(F5:F10)*
12			
13	=AVERAGE(D5:D9)		
14			
15			
16	=STDEVP(D5:D9)		
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25		=($L$14/(COUNT(C5:C9	
26			
27		*2nd method*	
28			
29		*F test =*	=($L$15/1)/($L$14/(COUN
30			
31		*T test =*	=SQRT($F$29)

	G	H	I
1	C = F(Y)		
2			
3			
4	**Zc ²**	**Zy ²**	**Zy . Zc**
5	**=E5^2**	**=F5^2**	**=E5*F5**
6	**=E6^2**	**=F6^2**	**=E6*F6**
7	**=E7^2**	**=F7^2**	**=E7*F7**
8	**=E8^2**	**=F8^2**	**=E8*F8**
9	**=E9^2**	**=F9^2**	**=E9*F9**
10			
11	***=SUM(G5:G10)***	***=SUM(H5:H10)***	***=SUM(I5:I10)***

	J	K	L
1			
2			
3			
4	**Zc**	**e**	**e ²**
5	**=$C$19+($C$20*F5)**	**=E5-J5**	**=K5 ^2**
6	**=$C$19+($C$20*F6)**	**=E6-J6**	**=K6 ^2**
7	**=$C$19+($C$20*F7)**	**=E7-J7**	**=K7 ^2**
8	**=$C$19+($C$20*F8)**	**=E8-J8**	**=K8 ^2**
9	**=$C$19+($C$20*F9)**	**=E9-J9**	**=K9 ^2**
10			
11	***=SUM(J5:J10)***	***=SUM(K5:K10)***	***=SUM(L5:L10)***
12			
13			
14		***SS resid.***	**=SUM(L5:L9)**
15		***SS reg.***	**=SUM(M5:M9)**
16		***SS total =***	**=SUM(L14:L15)**

الجدول (ز)

طريقة المربعات الصغرى باستخدام المصفوفات

	A	B
1		
2		
3		Y0
4		*1*
5		*1*
6		*1*
7		*1*
8		*1*
9		
10		
11		
12		
13	*Y*	=TRANSPOSE(B4:C
14	*Transpose*	=TRANSPOSE(B4:C
15		
16	*Yt . Y*	=MMULT($B$13:F
17		=MMULT($B$13:F
18		
19	*(Yt . Y) - 1*	=MINVERSE($B$16:
20		=MINVERSE($B$16:
21		
22	*Yt . C*	=MMULT($B$13:F
23		=MMULT($B$13:F
24		
25	*b0 =*	=MMULT($B$19:C
26	*b1 =*	=MMULT($B$19:C
27		
28	*MEAN OF C*	=$E$11/(COUNT(C4:
29		
30	*F test =*	
31	*T test =*	

	C	D	E
1			C = F (Y)
2			
3	Y	C	C
4	791	684	=$B$25+($B$26*C4)
5	848	786	=$B$25+($B$26*C5)
6	1122	965	=$B$25+($B$26*C6)
7	1266	1032	=$B$25+($B$26*C7)
8	1300	1190	=$B$25+($B$26*C8)
9			
10			
11			*=SUM(E4:E10)*
12			
13	=TRANSPOSE(B4:C8)	=TRANSPOSE(B4:C8	=TRANSPOSE(B4:C8)
14	=TRANSPOSE(B4:C8)	=TRANSPOSE(B4:C8	=TRANSPOSE(B4:C8)
15			
16	=MMULT($B$13:$F$14,B		
17	=MMULT($B$13:$F$14,B		
18			
19	=MINVERSE($B$16:$C$17		
20	=MINVERSE($B$16:$C$17		
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30		=($G$18/1)/($G$17/(C	
31		=SQRT($D$30)	

	F	G
1		
2		
3	e	e ²
4	=D4-E4	=F4^2
5	=D5-E5	=F5^2
6	=D6-E6	=F6^2
7	=D7-E7	=F7^2
8	=D8-E8	=F8^2
9		
10		
11	*=SUM(F4:F10)*	*=SUM(G4:G10)*
12		
13	=TRANSPOSE(B4:C8	
14	=TRANSPOSE(B4:C8	
15		
16		
17	*SSresid.*	=SUM(G4:G9)
18	*SSreg*	=SUM(H4:H9)
19	*SStotal*	=SUM($G$17:$G$18)
20		
21		
22	*r ² =*	=$G$18/$G$19
23		
24		
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		

	H
1	
2	
3	(C - C) ²
4	=(E4-$B$28)^2
5	=(E5-$B$28)^2
6	=(E6-$B$28)^2
7	=(E7-$B$28)^2
8	=(E8-$B$28)^2

وأخيراً لا يسعني والكتاب الذي بين يديك قارئي العزيز وقد استكمل صورته النهائية إلا أن أشكر الدكتور رجا حجّار والدكتور طارق مكداشي والسيدة رينيه غطاس الذين وفّروا لي فرصة استخدام أجهزة الكمبيوتر في كلية بيروت الجامعية وسهلوا عليَّ عملي، مع شكري إلى طلبة ماجستير إدارة الأعمال في كلية بيروت الجامعية الذين تحملوا عبء تجربة هذه البرامج في جزءٍ بسيط من مادة الـ (Business & The Computer) التي كُنت أُدرِّسها لهم خلال العامين الفائتين وأخصّ بالشكر منهم الذين عملوا على تجربة هذه البرامج وتطويرها وهم الطلبة ماهر عز الدين، صلاح الدين حمزة، جُوويل مجدلاني، زينة عدره. كما وأشكر الدكتور منير الصيداني الذي أتاح لي فرصة استخدام أجهزة الكمبيوتر في مركزه.

أما فيما يتعلق بفكرة تحديث الكتاب بما يتناسب وعصر المعلوماتية الذي نعيش فيه فأخص بالذكر الدكتور سامي الخترش قسم الاقتصاد/ جامعة الكويت والدكتور خالد السبع النجار، قسم الاقتصاد/ جامعة حلب على تشجيعهما وتقديرهما لهذا الكتاب، كما وأشكر الزملاء الخبراء المقومين: الدكتور محمود خريباني والدكتورة وداد سعد والدكتور أحمد سلوم في كلية العلوم الاقتصادية وإدارة الأعمال في الجامعة اللبنانية وكذلك الدكتور عبد المنعم مبارك من جامعتي الاسكندرية وبيروت العربية، لما قدموه من دعم مكّنني من إنجاز هذا المطبوع العلمي.

وأخيراً أتقدم بالشكر الجزيل إلى عميد الكلية الدكتور زهير شكر وإلى مدير الكلية الدكتور بسام عبد الملك وإلى أمين السر الدكتور نمر روحانا الذين أتاحوا لي فرصة تدريس مادة الاقتصاد القياسي التطبيقي في الجامعة اللبنانية. والله الموفق.

الدكتور عبد الرزّاق شربجي
كلية العلوم الاقتصادية وإدارة الأعمال
الجامعة اللبنانية

بيروت ١٩٩٣/٣/١٥

الفصل الأول
طبيعة الاقتصاد القياسي

تعريف الاقتصاد القياسي:

الاقتصاد القياسي، هو فرعٌ حديث من فروع علم الاقتصاد، يهدف إلى تفسير (Explanation) وتوقع (Prediction) الظاهرة الاقتصادية، معتمداً في ذلك، على القياس الفعلي للمتغيرات الاقتصادية والعلاقات فيما بينها. ويمكن تعريف كلمة (Econometrics) بشكل اقتصادي مبسط كالآتي:

Econo metrics

→ Measurements .... قياس

→ of Economic variables..... المتغيرات الاقتصادية

and relationships .... والعلاقات فيما بينها

قياس وتحليل العلاقات الاقتصادية بين هذه المتغيرات فهو الذي يشكل العمود الفقري للاقتصاد القياسي[1].

النماذج الاقتصادية:

دعنا نفترض أنه لدينا نموذج يهدف إلى توضيح العلاقة بين السعر والكمية المتبادلة من سلعة ما في السوق، وأن هذا النموذج يتضمن ثلاثة معادلات هي دالة الطلب، ودالة العرض ومعادلة التوازن. بالرغم من أن هذا النموذج يهدف إلى تحديد العلاقة بين الكمية والسعر إلا أنه سوف يتضمن متغيرات أخرى تساعد في تفسير العلاقة، كأن نُدخل الدخل المتاح في دالة الطلب، أو نُدخل أثمان عوامل الانتاج في دالة العرض، أو أن ندخل متغيرات أخرى تساعد أيضاً في تفسير العلاقة الاقتصادية.

(1) Lawrence R. Klein., "A text Book of Econometrics". 2nd ed., prentice - Hall, Inc., New Jersey, 1974 pp: 1 - 2

القياسي، تهدف إلى تفسير وتوقع قيم الظاهرة الاقتصادية، وهي نماذج شرطية (Conditional)، بمعنى أنها نماذج تتضمن المتغير العشوائي والذي يقيس أثر المتغيرات الأخرى التي لم يتمكن الباحث من قياسها وإدخالها بشكل صريح في النموذج الاقتصادي.

ولنأخذ مثالاً آخراً نفترض فيه أن أحد الباحثين يرغب في تحديد الاختلافات في مستوى الدخل القومي. فباستطاعة الباحث صياغة النموذج المناسب لتحديد الدخل القومي وذلك بالعودة إلى النظرية الاقتصادية. فمن المعلوم، أن النظرية الاقتصادية تقترح أن الاستهلاك هو دالة متزايدة في الدخل المتاح لكنه يتزايد بنسبة أقل من نسبة زيادة الدخل، (Consumption is an increasing function of Disposable Income, but likely to increase by less than the increase in Disposable Income.) في حين أن الاستثمار هو دالة متزايدة في الدخل، ودالة متناقصة في سعر الفائدة (Investment is an increasing function of National Income and a decreasing function of the Rate of Interest) أما الدخل، فهو مجموع الاستهلاك والاستثمار والانفاق الحكومي (National income is the sum of Consumption, Investment , and Government Spending on Goods and Services).

وهنا نلاحظ، أن الباحث في صياغته للنموذج الرياضي المناسب لتحديد مستوى الدخل القومي، سوف يواجه صعوبات، أهمها أن مقترحات النظرية الاقتصادية، تشير إلى وجود علاقة بين المتغيرات، لكن النظرية الاقتصادية لم تحدد فيما إذا كانت هذه العلاقة خطية (linear) أو غير خطية (Non linear)، أضف إلى ذلك أن النظرية الاقتصادية حددت أهم المتغيرات لكنها لم تحدد كل المتغيرات الوثيقة الصلة بالظاهرة الاقتصادية، فهل يأخذ الباحث الاستثمار دالة في الدخل للفترة السابقة، أم أنه يأخذ الاستثمار دالة في مجموع ترجيحي (Weighted sum) عن الدخل في الفترات السابقة؟ فلا بد إذن من إدخال المتغير العشوائي في النموذج الرياضي المناسب.

دعنا نفترض أن الباحث توصل إلى النموذج الهيكلي (Structural model) الآتي والذي يتناسب مع ما ورد في النظرية الاقتصادية:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 (Y_t - T_t) + U_{t_1} \quad (1)$$

$$I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 R_t + U_{t_2} \quad (2)$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \quad (3)$$

حيث ترمز C_t، I_t و Y_t إلى كلٍ من الاستهلاك، الاستثمار، والدخل القومي في الفترة t على التوالي. وترمز $(Y_t - T_t)$ إلى الدخل المتاح بعد الضريبة في الفترة t ، بينما ترمز R_t و G_t إلى سعر الفائدة والإنفاق الحكومي في الفترة t على التوالي.

يتضح في النموذج أعلاه، ثلاث ملاحظات هامة تجدر الإشارة إليها:

أ - أن الباحث لا يعلم مقدماً قيم المعالم α_0، α_1، β_0، β_1وβ_2. فالنظرية الاقتصادية تقترح أن α_0 أكبر من الصفر، وأن α_1 أكبر من الصفر وأقل من الواحد الصحيح، وأن β_0 أكبر من الصفر، و β_1 أكبر من الصفر في حين أن β_2 أصغر من الصفر. فهذه المعلومات هي أقصى ما يمكن للباحث الحصول عليه أو استنتاجه من النظرية الاقتصادية، لكن المشكلة القائمة ما زالت أساساً مشكلة اقتصاد قياسي، وتتلخص في إعطاء تقديرات رقمية لقيم هذه المعالم.

ب - يتضمن النموذج أعلاه على المتغيرات العشوائية U_{t_1}، U_{t_2} حيث ترمز U_{t_1} إلى متغير عشوائي خاص بدالة الاستهلاك ويختلف عن المتغير العشوائي U_{t_2}. الجدير بالذكر، أن إدخال مثل هذه المتغيرات العشوائية في النموذج، هو الذي يميز النموذج الاقتصادي المستخدم في الاقتصاد القياسي عن النموذج الاقتصادي المستخدم في الاقتصاد الرياضي. كما

وأن إدخال هذا النوع من المتغيرات، يتطلب فروض خاصة بالمتغير العشوائي، بحيث أن توافر كل أو بعض الفروض في النموذج الاقتصادي هو الذي يوجه النموذج الاقتصادي نحو التحليل الإحصائي المناسب.

حـ - نلاحظ في النموذج أعلاه أن المتغيرات الداخلية (الاستهلاك والاستثمار) هي دوال خطية (Linear functions) للمتغيرات العشوائية، لذلك يجب على الباحث معاملة هذه المتغيرات الداخلية على أنها متغيرات عشوائية (Random Variables).

معادلات النموذج:

تسمى المعادلات التي يتضمنها النموذج الاقتصادي بالمعادلات الهيكلية (Structural equations). ويختلف عدد المعادلات من نموذج اقتصادي إلى نموذج آخر، تبعاً لمدى سهولة أو صعوبة تفسير الظاهرة الاقتصادية قيد البحث، وتبعاً للأهداف التي يرمي الباحث إلى تحقيقها من صياغته للنموذج الاقتصادي.

تنقسم المعادلات الهيكلية في النموذج الاقتصادي إلى معادلات سلوكية (Behavioral equations) وأخرى تعريفية (Definitional equations). أما المعادلات السلوكية فتعبر عن العلاقة الدالية بين المتغيرات ومثال ذلك دالة الاستهلاك أو دالة الاستثمار في نموذج الدخل القومي السالف الذكر. أما المعادلة التعريفية فهي معادلة تعبر عن علاقة إقتصادية ناتجة عن تعاريف مصطلح عليها[1]. ومثال ذلك معادلة الدخل في النموذج السالف الذكر.

---

(١) د. محمد علي الليثي. «مقدمة في الإقتصاد الرياضي». دار الجامعات المصرية، 1968، ص ص: 12-10.

متغيرات النموذج:

تتضمن معادلات النموذج الإقتصادي عدداً من المتغيرات الإقتصادية تختلف بإختلاف طبيعة المشكلة الإقتصادية قيد البحث. وتنقسم متغيرات النموذج إلى[1]:

أ ـ متغيرات داخلية (Endogenous Variables):

وهي المتغيرات التي تتحدد إختلافاتها عن طريق النموذج الإقتصادي قيد البحث. بمعنى أن اختلافات (Variation) المتغيرات الداخلية تتحدد بعد معرفة قيم معالم النموذج الإقتصادي وقيم المتغيرات الأخرى في النموذج. ونلاحظ في المثال السابق عن الدخل القومي أننا عبّرنا عن الإستهلاك كدالة للدخل المتاح، وعبرنا عن الإستثمار كدالة للدخل وسعر الفائدة، في حين تحدد الدخل بالإستهلاك، والإستثمار والإنفاق الحكومي. لذلك يعتبر كلاً من الإستهلاك والإستثمار والدخل متغيرات داخلية لأنها تتحدد بنموذج الدراسة.

ب ـ متغيرات محددة مُسبقاً: (Predetermined Variables):

وهي متغيرات لا تتحدد قيمها عن طريق نموذج الدراسة، وإنما تتحدد بعوامل خارجة عن النموذج، وكثيراً ما يحدث وأن تتحدد قيم هذه المتغيرات بنموذج آخر مختلف عن نموذج البحث ويكون أوسع منه.

تنقسم المتغيرات المحددة مسبقاً إلى متغيرات خارجية (Exogenous Variables) ـ ومثال ذلك الضرائب، سعر الفائدة، والإنفاق الحكومي في مثالنا السالف الذكر ـ وإلى متغيرات داخلية محددة في فترات سابقة (Lagged Endogenous Variables)، ومثال ذلك الدخل القومي للفترة السابقة ـ في دالة الإستثمار لمثالنا السابق ـ

(1) Klein, PP: 133-136.

لا يمكن أن يكون هناك حل (Solution) للنموذج إلّا إذا كان عدد المعادلات مساوياً لعدد المجاهيل. وهنا تجدر الإشارة إلى أنه حتى يتمكن الباحث من تقدير قيم المعالم للنموذج الهيكلي، لا بدّ له من تحويل النموذج إلى شكل آخر يعرف بالنموذج المصغر (Reduced Form)، حيث يتم معاملة كل متغير داخلي على أنه دالة فقط بالمتغيرات المحددة مسبقاً. فلا يظهر في النموذج المصغر أي متغير داخلي كدالة لأي متغير داخلي آخر. ويمكننا بالنسبة للمثال السابق عن الدخل القومي، تحويل النموذج الهيكلي إلى نموذج مصغر كالآتي:

دعنا نستبدل الدخل في المعادلة (1) بقيمتها من المعادلة (3):

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 (C_t + I_t + G_t - T_t) + U_{t1}$$

ودعنا نستبدل I_t في هذه المعادلة بقيمتها من المعادلة (2):

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 (C_t + \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 R_t + U_{t2} + G_t - T_t) + U_{t1}$$

إذن:

$$C_t = \left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1 \beta_0}{1-\alpha_1}\right) + \left(\frac{\alpha_1 \beta_1}{1-\alpha_1}\right) Y_{t-1} + \left(\frac{\alpha_1 \beta_2}{1-\alpha_1}\right) R_t + \left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\right) G_t - \left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\right) T_t + \left(\frac{\alpha_1 U_{t2} + U_{t1}}{1-\alpha_1}\right) \quad (4)$$

وتشكل المعادلة (4) النموذج المصغر للمعادلة الهيكلية (1)، وفيها نعبر عن المتغير الداخلي (الإستهلاك) كدالة في المتغيرات المحددة مسبقاً فقط. أما المعادلة الهيكلية (2) فلا تحتاج إلى تحويل، لأنها تعبّر مباشرة عن الإستثمار في شكل دالة للمتغيرات المحددة مسبقاً.

وأخيراً، يمكننا تحويل المعادلة الهيكلية (3) إلى نموذج مصغر وذلك بإستبدال C_t و I_t في المعادلة (3) بقيمها من المعادلات (1) و (2) :

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 (Y_t - T_t) + U_{t1} + \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 R_t + U_{t2} + G_t$$

$$Y_t = \left(\frac{\alpha_0 + \beta_0}{1-\alpha_1}\right) + \left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right) Y_{t-1} + \left(\frac{\beta_2}{1-\alpha_1}\right) R_t + \left(\frac{1}{1-\alpha_1}\right) G_t - \left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\right) T_t + \left(\frac{U_{t1} + U_{t2}}{1-\alpha_1}\right) \qquad (5)$$

الجدير بالذكر، أن المعادلات (2)، (4) و (5) تشكل النموذج المصغر لنموذج تحديد الدخل القومي لمثالنا السابق. ويتضح في هذا النموذج، أن تغير سعر الفائدة مثلاً، بوحدة قياس واحدة، سوف يُغيّر الإستهلاك بقيمة $\left(\frac{\alpha_1\beta_2}{1-\alpha_1}\right)$، وسوف يُغير الإستثمار بقيمة β_2، بينما يُغير الدخل القومي بقيمة $\left(\frac{\beta_2}{1-\alpha_1}\right)$. في حين أن تغير كل من الإنفاق الحكومي والضرائب بوحدة قياس واحدة، سوف لن يؤثر في الإستهلاك، ولن يؤثر في الإستثمار، وإنما سيؤثر في الدخل القومي.

منهجية البحث في الإقتصاد القياسي:

تنقسم منهجية البحث في مجال الإقتصاد القياسي (The Methodology of Econometrics) إلى مراحل ثلاث:

المرحلة الأولى:

ويتوجب على الباحث في هذه المرحلة من بحثه أن يعمل على صياغة فروض النظرية الإقتصادية في شكل عشوائي (Explicit Stochastic equation form) فعلى سبيل المثال تقترح نظرية الطلب على أن الكمية المطلوبة من سلعةٍ ما (D)، هي دالة في سعر السلعة (P_x)، وفي سعر السلعة البديلة أو المتممة (P_z)، وفي دخل المستهلك (Y). فعلى افتراض ثبات أذواق المستهلكين

خلال فترة الدراسة، فإنه يمكن للباحث صياغة هذه المقترحات في صيغة عشوائية كالآتي:

$$D = b_0 + b_1 P_x + b_2 P_z + b_3 Y + U$$

ويتوجب على الباحث في هذه المرحلة أيضاً أن يتوقع قيمة (Magnitude) وإتجاه (Direction) العلاقة بين المتغيرات الإقتصادية. فمن نظرية الطلب، يمكن للباحث أن يتوقع إشارة سلبية (Negative Sign) للمعامل b_1، حيث تقترح النظرية الإقتصادية وجود علاقة عكسية بين الطلب على السلعة X وسعر هذه السلعة. كذلك يمكن للباحث أن يتوقع أن تكون إشارة b_2 سلبية إذا كانت السلعة Z متممة (Complement)، أو أن تكون الإشارة موجبة (Positive sign) للمعامل b_2 إذا كانت السلعة Z بديلة (Substitute)للسلعة X. أما إشارة المعامل b_3 فيتوقع أن تكون موجبة في حالة السلع العادية (Normal goods)، حيث يُفترض في النظرية الإقتصادية أن يشتري المستهلك كميات أكبر من السلعة X عند إرتفاع دخله ما لم تكن السلعة X رديئة (Inferior goods). ونظراً لأن المعاملات b_1، b_2 و b_3 تقيس المرونة (Elasticity) أو تقيس الميل (Propensity) لذلك فعلى الباحث أن يتوقع قيمتها في هذه المرحلة من بحثه، ـ أي قبل جمع البيانات ـ علماً أنه يُفترض في النظرية الإقتصادية أن تكون قيمة المعامل b صغيرة في حالة السلع الضرورية (Necessity goods) وأن تكون قيمة المعامل b كبيرة في حالة السلع الكمالية (luxury goods)، ما لم تتوافر البدائل (Substitutes)[1].

المرحلة الثانية:

ويتوجب على الباحث في المرحلة الثانية من بحثه أن يجمع البيانات

(١) د. اسماعيل محمد هاشم. «المدخل إلى الإقتصاد التحليلي». دار النهضة العربية، عام 1968 بيروت ص ص: 227-230.

الواقعية لمتغيرات النموذج، ثم أن يستخدم الأساليب (Techniques) المناسبة في الإقتصاد القياسي، لتقدير القيم الرقمية للنموذج الإقتصادي الذي تمت صياغته في المرحلة الأولى من البحث. فبالعودة إلى مثالنا السابق عن دالة الطلب، نجد أنه يتوجب على الباحث جمع البيانات الفعلية عن الكميات التي أقبل المستهلكون على شرائها من السلعة X، وعن أسعار السلعة X وأسعار السلع البديلة أو المتممة إضافة إلى دخل المستهلك. ثم يستخدم الباحث الأساليب الإحصائية المناسبة لتحليل النموذج للحصول على تقديرات رقمية لقيم المعالم في النموذج.

المرحلة الثالثة:

وفيها يعمل الباحث على تقييم (Evaluating) المعالم المقدرة للنموذج الإقتصادي المستخدم في البحث. ويعتمد الباحث في تقييمه لمعالم النموذج على أسس إقتصادية وأخرى إحصائية إضافة إلى المعايير الخاصة بالإقتصاد القياسي.

فمن الناحية الإقتصادية: يعمل الباحث على مقارنة قيم وإشارات المعالم التي تمّ تقديرها في المرحلة الثانية من البحث، مع القيم والإشارات لهذه المعالم والتي تمّ توقعها اعتماداً على النظرية الإقتصادية في المرحلة الأولى للبحث.

ومن الناحية الإحصائية: يلجأ الباحث إلى استخدام الأساليب الإحصائية المناسبة لتقييم الأهمية النسبية (The relative importance) المتغيرات المحددة مسبقاً، في تحديد (تفسير) الإختلافات الكلية في المتغيرات الداخلية. ويتم ذلك بإختبار جوهرية معاملات الإنحدار، أو باختبار جوهرية معامل التحديد من الناحية الإحصائية.

أما من وجهة نظر الإقتصاد القياسي: فيتوجب على الباحث اختبار مدى انسجام وانطباق الفروض الخاصة بالخطأ العشوائي (Assumptions underlying the error term) على النموذج الإقتصادي المستخدم في البحث.

ويخلص الباحث في نهاية المرحلة الثالثة إلى نتائج يُستدل بها على مدى إنسجام النظرية الإقتصادية مع الظاهرة إضافة إلى التنبؤ بقيم الظاهرة الإقتصادية.

ويمكن توضيح المراحل الثلاث لمنهجية البحث في الإقتصاد القياسي كالآتي:

المرحلة الأولى:
- النظرية الإقتصادية
- النموذج الرياضي
- النموذج القياسي

المرحلة الثانية:
- تجميع البيانات
- تقدير معالم النموذج

المرحلة الثالثة:
- تقييم النموذج الإقتصادي بإستخدام معايير إقتصادية، إحصائية وقياسية

- قبول النظرية الإقتصادية ← التنبؤ بقيم الظاهرة الإقتصادية
- رفض النظرية الإقتصادية
- تعديل النظرية الإقتصادية ← اختبار النظرية المعدّلة

[illegible] في حالة المرحلة الثالثة إلى نتائج يُستدل بها على مدى إنسجام النظرية الإقتصادية مع الظاهرة إضافة إلى التنبؤ بقيم الظاهرة الإقتصادية.

ويمكن توضيح المراحل الثلاث لمنهجية البحث في الإقتصاد القياسي كالتالي:

النظرية الإقتصادية

النموذج الرياضي

المرحلة الأولى

[illegible]

جمع البيانات

تقدير معالم النموذج

المرحلة الثانية

تقييم النموذج الإقتصادي باستخدام معايير إقتصادية وإحصائية وقياسية

المرحلة الثالثة

قبول النظرية الإقتصادية

التنبؤ بقيم الظاهرة الإقتصادية

رفض النظرية الإقتصادية

تعديل النظرية الإقتصادية

اختبار النظرية المعدّلة

القيود التي تواجه الباحث في تطبيق الإقتصاد القياسي *: (Limitations of Econometric Methods)

لا شك أن الباحث في مجال الإقتصاد القياسي يضطر إلى الإعتماد على مصادر مختلفة في جمع بياناته الإقتصادية. فقد يعتمد على منشورات المؤسسات الحكومية، للحصول على البيانات لإحدى المتغيرات الإقتصادية، في حين يعتمد على منشورات المؤسسات الدولية في الحصول على البيانات لمتغير اقتصادي آخر... وقد يعتمد على بيانات مالية صادرة عن قطاع رجال الأعمال أو غيره...، علماً أن أكثر هذه المؤسسات عند إعدادها لمنشوراتها الإحصائية الفترية قد تهدف إلى التأثير في الرأي العام، أو إظهار التوازن بين الإيرادات والنفقات دون إظهار الإيرادات غير المشروعة، أو إظهار التوازن في الميزانية و.. الخ، لكن بالتأكيد، فإن اكثر المؤسسات لا تهدف إلى إعطاء بيانات رقمية دقيقة وكاملة بهدف الإستعمال في الإقتصاد القياسي[1].

لقد سبق وذكرنا أن الهدف من إدخال المتغير العشوائي في النموذج الإقتصادي هو امتصاص آثار كل الأخطاء الممكنة في النموذج الإقتصادي، لكننا لم نذكر وقتئذٍ الأخطاء الممكنة في قياس المتغير المستقل، ذلك أن المتغير المستقل يُعامل في الإقتصاد القياسي على أنه ثابت في المجتمعات الفرعية (Fixed variable in the subpopulations). الجدير بالذكر، هو أن كلاً من المتغير المستقل والمتغير التابع، هما في الحقيقة متغيرات اقتصادية، وبالتالي فكلاهما عُرضةً لأخطاء في القياس (Measurement errors). علماً أن الخطأ النظامي (Systematic measurement error) في قياس المتغير لا يؤثر على خصائص تقديرات معاملات الإنحدار للنموذج الإقتصادي، فلو أخطأ

---

* تجدر الإشارة إلى أن الفصول القادمة ستتناول المصطلحات المستخدمة في هذا الجزء من المؤلف، إضافة إلى الكثير من المشاكل التي تواجه الباحث في الإقتصاد القياسي.

(1) Klein, PP: 383-385.

الباحث في قياس قيمة كل مشاهدة (Observation) من مشاهدات المتغير المستقل بمقدار (7-) ليرة مثلاً، فإن ذلك يؤثر في قيمة الثابت b_0 في معادلة الإنحدار، لكنه لا يؤثر في تقديرات بقية المعالم في النموذج. لكن المشكلة الأساسية التي تصادف الباحث في الإقتصاد القياسي، تكمن في أن الخطأ في قياس المتغير المستقل قد لا يكون خطأً نظامياً بل خطأً عشوائياً، ومثال ذلك ما ورد في نظرية فريدمان (Friedman) للإستهلاك.

فمن المعلوم أن نظرية فريدمان تقترح أن كُلاً من الدخل والإستهلاك، يتكون من جزأين أساسيين هما، الجزء الدائم (permanent) والجزء المؤقت (Transient)، حيث يُعالج الجزء المؤقت بشكل عام على أنه عبارة عن أخطاء عشوائية في القياس، لذلك تفترض هذه النظرية أن العلاقة بين الإستهلاك الدائم C_p والدخل الدائم Y_p هي علاقة تناسبية (Proportional):

$$C_p = K\ Y_p$$

يعني أن الميل الحدي للإستهلاك من الدخل الدائم ثابت ويساوي K. علماً أن K في هذا النموذج تمثل الميل الحدي والميل المتوسط للإستهلاك (The Marginal and average propensity to consume). أما معادلات الإستهلاك الكلي والدخل الكلي فهي:

$$C = C_p + C_t$$

$$Y = Y_p + Y_t$$

حيث ترمز C و Y إلى الإستهلاك الكلي والدخل الكلي على التوالي. وترمز C_p و Y_p إلى الإستهلاك الدائم والدخل الدائم على التوالي، في حين ترمز C_t و Y_t إلى الجزء العشوائي (المؤقت) من الإستهلاك والدخل الكلي. فإذا فرضنا إنعدام العلاقة بين الجزء الدائم النظامي والجزء المؤقت العشوائي، وفرضنا إنعدام العلاقة بين الجزء العشوائي للإستهلاك والجزء العشوائي

للدخل، لأمكننا اعتبار أن التغاير (Covariance) بين هذه الأجزاء يساوي صفراً:

$$E\ (Y_p Y_t) = E\ (Y_p C_t) = E\ (C_t Y_t) = 0$$

الجدير بالذكر، أن الباحث في الحياة العملية يجمع بيانات عن الإستهلاك الكلي والدخل الكلي، لذلك فإن الميل الحدي للإستهلاك يساوي:

$$\beta = \frac{E\ (CY)}{EY^2}$$

$$\beta = \frac{E\ [(C_p + C_t)\ (Y_p + Y_t)]}{EY^2}$$

$$\beta = \frac{E\ [(K\ Y_p + C_t)\ (Y_p + Y_t)]}{EY^2}$$

$$\beta = \frac{K\ E\ Y_p^2}{E\ Y^2}$$

$$\beta = K\ P_y$$

علماً أن P_y هي نسبة تباين (Variance) الجزء الدائم (النظامي) من الدخل، إلى التباين في الدخل الكلي. ونظراً لأن تباين الجزء النظامي يكون أقل من التباين الكلي لذلك فإن β ستكون أقل من القيمة الحقيقية K. ونخلص بذلك إلى أن وجود أخطاء عشوائية في قياس المتغير المستقل، سيعطي قيمة متحيزة نحو الأسفل (downward biased) لتقدير معامل الإنحدار في المجتمع الإحصائي. ويُقترح في الإقتصاد القياسي للخروج من هذا المأزق، استخدام المجموع المرجح للدخل السابق (a weighted sum of past actual values) كمقياساً للدخل الدائم، حيث يؤخذ الإستهلاك الكلي على أنه دالة في هذا المجموع المرجح إضافة إلى المتغير العشوائي الذي يقيس الجزء المؤقت

من الإستهلاك[1]. الجدير بالذكر، أن مشكلة وجود الأخطاء في قياس المتغير المستقل هي مشكلة معقدة جداً، وصعبة الحل، ولا يوجد إلى الآن حلٌ جيد لهذه المشكلة في الإقتصاد القياسي. لكن يُنصح عادةً باستخدام المتغيرات الوسيلة المساعدة (Instrumental variables) لمعالجة مثل هذه المشكلة[2].

كثيراً ما يضطر الباحث إلى استخدام بيانات مبوبة في توزيعات تكرارية أو استخدام بيانات مجمعة في فئات (Intervals)، مما يضطره إلى دراسة العلاقة بين مراكز الفئات للمتغيرات الإقتصادية، باعتبار أن مراكز الفئات للمتغيرات هي أفضل قيمة تمثل كل المشاهدات في الفئة. وهنا نلاحظ، أن مثل هذا النوع من تجميع البيانات يُدخل أخطاء في قياس المتغيرات (Grouping errors) فيؤثر في نتائج التحليل، ذلك لأن معاملات الإرتباط (Correlation Coefficients) بين مراكز الفئات للمتغيرات تكون أكبر من معاملات الإرتباط للبيانات الأصلية. ويعود السبب في ذلك إلى أن تباين توزيع المعاينة للأوساط الحسابية لمتغير ما يكون أقل من تباين المتغير في المجتمع الإحصائي:[3]

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}$$

وتجدر الإشارة إلى أن الباحث في مجال الإقتصاد القياسي، يصادف مشكلة حاسمة تتعلق بوجود علاقة قوية جداً بين المتغيرات المستقلة (Multi collinearity). علماً أنه إذا كانت العلاقة بين متغيرين مستقلين تامة (perfect)، بمعنى أن أحد المتغيرات المستقلة هو تركيب خطي (linear combination) لمتغير مستقل آخر، فحينئذٍ، لا يستطيع الباحث إيجاد

---

(1) Klein, P: 387.

(2) Aigner, Dennis J., "Basic Econometrics" prentice-Hall, inc., N.J 1971. P: 111., and PP: 184-185.

(3) Taro Yamane., "Statistics". 3rd ed., Harpper international Edition. Harpper & Row publishers, Inc., N.Y., 1973., P: 163.

معاملات الإنحدار الجزئية للنموذج الإقتصادي. بينما إذا كانت العلاقة بين متغيرين مستقلين قوية جداً، فحينئذٍ قد يحصل الباحث على قيمة لمعامل التحديد قريبة من الواحد الصحيح في حين تكون معاملات الإنحدار الجزئية غير جوهرية من الناحية الإحصائية.

وأخيراً تجدر الإشارة إلى أن اختبار مدى إنسجام النظرية الإقتصادية مع الواقع هو أمر صعب في حد ذاته. فالنظرية الإقتصادية أحياناً تقترح العديد من الفروض، ويُثار التساؤل فيما إذا كان باستطاعة الباحث اختبار كل هذه الفروض. ولنأخذ على سبيل المثال نظرية طلب المستهلك والتي تقترح أن دالة الطلب متجانسة من الدرجة الصفرية في الدخل والأسعار (بمعنى أننا إذا ضاعفنا مثلاً أثمان السلعتين وكذلك ضاعفنا الجزء المخصص من دخل المستهلك للإنفاق عليهما فإن الكميات التي يشتريها المستهلك من السلعتين لن تتأثر). كذلك تقترح هذه النظرية أن المستهلك مدفوعاً برشده الإقتصادي سيغير من طلبه على السلعة بتغير العوامل المؤثرة في الطلب، وتخلص النظرية إلى أن أثر تغير ثمن السلعة على مشتريات المستهلك من هذه السلعة، سيتضمن على أثر الإحلال وأثر الدخل وهو ما يعرف بمعادلة سلوتسكي (Slutsky's equation)، فإذا كانت السلعة تشكل جزءاً بسيطاً من إنفاق المستهلك فحينئذٍ يكون أثر الدخل قليل الأهمية ويتغلب عليه أثر الإحلال فيكون أثر السعر سالباً. في حين إذا كانت السلعة تشكل جزءاً كبيراً من إنفاق المستهلك فحينئذٍ يكون أثر الدخل كبيراً، ويكون الأثر النهائي لتغير السعر موجباً للسلع الدنيا، حيث ينخفض الطلب على هذه السلع بإنخفاض السعر. ويكون الأثر النهائي لتغير السعر سلبي (Negative) بالنسبة للسلع العادية (Normal goods)[1]. الجدير بالذكر، أن مثل هذه المقترحات تعتمد على

---

(1) Aigner, P: 4, & Klein, P: 7.

وانظر أيضاً: الليثي ص ص: 57-43

التفاضل الجزئي (partial derivative) لمعادلات توازن المستهلك، حيث نفترض التغير في إحدى العوامل المؤثرة في الطلب مع ثبات بقية العوامل. والسؤال الذي يطرح نفسه، هل بإمكان الباحث تثبيت هذه العوامل الأخرى خلال فترة زمنية ليتمكن من دراسة الأثر الحقيقي للتغير في أحد العوامل على الكمية المطلوبة؟ كذلك يثار التساؤل عن مدى إمكانية اختبار كل هذه المقترحات النظرية؟ فأيٍ من هذه المقترحات قابلة للإختبار الإحصائي؟.

الفصل الثاني

الانحدار الخطي البسيط

فروض الخطأ العشوائي:

لقد سبق وذكرنا أن الدور الأساسي للاقتصاد القياسي [illegible] معالم النموذج الاقتصادي من خلال [illegible] عدم التأكد [illegible] وذكرنا أن النموذج الإقتصادي قد يتضمن العديد من [illegible] تتضمن كل معادلة على الكثير من المتغيرات [illegible] المتغيرات التي يتضمنها أي نموذج اقتصادي هي [illegible] يرمي الباحث إلى تفسير اختلافاتها. والجدير بالذكر أن [illegible] النماذج الاقتصادية [illegible] يصبح أمراً بسيطاً [illegible] النماذج الإقتصادية البسيطة التي تتناول تفسير العلاقة بين [illegible] (dependent variable) والآخر مستقل (independent variable) [illegible] ذلك تفسير العلاقة بين الاستهلاك الشخصي (المتغير [illegible]) [illegible] الشخصي المتاح (المتغير المستقل Y_t) والتي يمكن [illegible] كالآتي:

$$[illegible] = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t \pm U_t$$

تشير الصيغة أعلاه إلى حقيقة هامة [illegible] أن العلاقات بين [illegible]

الاقتصادية، غير تامة (Inexact relationship)، حيث يقيس المتغير العشوائي U_t أثر متغيرات أخرىٰ ـ غير الدخل المتاح ـ لم نتمكن من قياسها وإدخالها بشكلٍ صريح في المعادلة . فلو فرضنا مثلاً أنه توافر لدينا بيانات دقيقة وكاملة عن كل من الاستهلاك الشخصي والدخل الشخصي المتاح لمجتمع احصائي مكوّن من 1000 عائله . وأننا استطعنا تصنيف هذا المجتمع في مجتمعات فرعية (Subpopulations) بحيث يتساوىٰ الدخل الشخصي المتاح للأسر ضمن كل مجتمع فرعي . فإننا نلاحظ في هذه الحالة، أن المتغير المستقل (الدخل المتاح) أصبح ثابتاً (Fixed variable) ضمن كل مجتمع فرعي . فإذا فرضنا أن المجتمع الفرعي الأول يتضمن 170 عائلة تتساوىٰ في دخلها المتاح وليكن 10000 $ في السنة . بينما يتضمن المجتمع الفرعي الثاني كل العائلات التي تحصل على نفس مستوىٰ الدخل المتاح وليكن 12000 $ في السنة، وهكذا، فإننا نحصل على مجتمعات فرعية، تتميز عن بعضها بتساوي الدخل المتاح لأفراد المجتمع الفرعي الواحد .

دعنا الآن نفترض أنه في دراستنا للعلاقة بين الاستهلاك والدخل، سنكتفي بالبيانات المتوفرة عن مجتمع فرعي معين. فلو أخذنا المجتمع الفرعي الأول فإننا سنلاحظ، أنه بالرغم من تساوي مستوىٰ الدخل الشخصي المتاح لكل هذه العائلات، إلا أنها سوف تُظهر تفاوتاً في إنفاقها الاستهلاكي . ويعود السبب في ذلك إلى عوامل أخرىٰ غير الدخل المتاح كاختلاف حجم وتركيب كل عائلة، واختلاف هوايات وطباع رب المنزل من حيث كونه مثقّف، رياضي، اجتماعي أو مضياف. . . . وبذلك نخلص إلى أنه لا يوجد علاقة تامة بين الدخل والاستهلاك، حيث يمكن لعائلتين (أو أكثر) أن تختلفا في إنفاقهما الاستهلاكي على الرغم من تساوي دخلهما الشخصي المتاح .

الجدير بالذكر، أنه بالرغم من ثبات الدخل المتاح ضمن كل مجتمع فرعي، إلا أنه توجد علاقة حقيقية في المعدل (on the average) بين

الاستهلاك الشخصي والدخل الشخصي المتاح. فلو رمزنا إلى القيمة المتوقعة في المعدل *(Expected value) للانفاق الاستهلاكي عند الدخل الشخصي المتاح* لكل العائلات في المجتمع الفرعي، بالرمز $E(C/Y) = \mu_{cy}$، واعتبرنا أن هذه القيمة تمثل العلاقة الحقيقية بين الاستهلاك الشخصي والدخل الشخصي المتاح، لأمكننا حينئذ صياغة هذه العلاقة الحقيقية (وعلى افتراض أنها علاقة خطية) كالآتي:

$$E(C/Y) = \mu_{cy} = \alpha + \beta Y$$

حيث تمثل μ_{cy} العلاقة الحقيقية المتوقعة في المعدل (الوسط الحسابي) بين الإستهلاك الشخصي والدخل الشخصي المتاح لكل العائلات ضمن المجتمع الفرعي. أما الإنفاقات الإستهلاكية الفردية للعائلات ضمن المجتمع الفرعي الواحد، فستكون مجمعة (Clustered) حول هذه القيمة. وبمعنىً أدق، فبإستطاعتنا مثلاً أن نُمثل العلاقة بين الدخل الشخصي المتاح والإستهلاك الشخصي للعائلة الأولى في المجتمع الفرعي الأول، بالدالة الآتية:

$$C = \alpha + \beta Y + U_1$$

وأن نُمثل هذه العلاقة، للعائلة الثانية في المجتمع الفرعي الأول بالدالة الآتية:

$$C = \alpha + \beta Y + U_2$$

وأن نمثل هذه العلاقة، للعائلة الأخيرة في المجتمع الفرعي الأول بالدالة الآتية:

$$C = \alpha + \beta Y + U_k$$

بحيث ترمز U_1 ، U_2 ..... U_k إلى الخطأ العشوائي الذي يقيس إختلاف العلاقة بين الدخل والإستهلاك عن العلاقة الحقيقية للمجتمع الفرعي الواحد. فيختلف استهلاك العائلة الأولى عن القيمة المتوقعة للإستهلاك في

الاستهلاك الشخصي والدخل الشخصي المتاح. فلو رمزنا إلى القيمة المتوقعة في المعدل (Expected value) للانفاق الاستهلاكي عند الدخل الشخصي المتاح لكل العائلات في المجتمع الفرعي، بالرمز $E(C/Y) = \mu_{cy}$، واعتبرنا أن هذه القيمة تمثل العلاقة الحقيقية بين الاستهلاك الشخصي والدخل الشخصي المتاح، لأمكننا حينئذ صياغة هذه العلاقة الحقيقية (وعلى افتراض أنها علاقة خطية) كالآتي:

$$E\,(C/Y) = \mu_{cy} = \alpha + \beta Y$$

حيث تمثل μ_{cy} العلاقة الحقيقية المتوقعة في المعدل (الوسط الحسابي) بين الإستهلاك الشخصي والدخل الشخصي المتاح لكل العائلات ضمن المجتمع الفرعي. أما الإنفاقات الإستهلاكية الفردية للعائلات ضمن المجتمع الفرعي الواحد، فستكون مجمعة (Clustered) حول هذه القيمة. وبمعنىً أدق، فبإستطاعتنا مثلاً أن نُمثل العلاقة بين الدخل الشخصي المتاح والإستهلاك الشخصي للعائلة الأولى في المجتمع الفرعي الأول، بالدالة الآتية:

$$C = \alpha + \beta Y + U_1$$

وأن نُمثل هذه العلاقة، للعائلة الثانية في المجتمع الفرعي الأول بالدالة الآتية:

$$C = \alpha + \beta Y + U_2$$

وأن نمثل هذه العلاقة، للعائلة الأخيرة في المجتمع الفرعي الأول بالدالة الآتية:

$$C = \alpha + \beta Y + U_k$$

بحيث ترمز U_1 ، U_2 ..... U_kإلى الخطأ العشوائي الذي يقيس إختلاف العلاقة بين الدخل والإستهلاك عن العلاقة الحقيقية للمجتمع الفرعي الواحد. فيختلف استهلاك العائلة الأولى عن القيمة المتوقعة للإستهلاك في

المجتمع الفرعي الأول بمقدار U_1، بينما يختلف استهلاك العائلة الثانية في المجتمع الفرعي الأول عن الإستهلاك المتوقع في هذا المجتمع بمقدار U_2 إلخ. آخذين في الإعتبار أنه توجد عوامل أخرى غير الدخل المتاح، تؤثر في الإنفاق الإستهلاكي لكل عائلة ضمن المجتمع الفرعي، فتجعل استهلاك أية عائلة ضمن هذا المجتمع الفرعي، مساوياً أو اكبر أو أقل، من القيمة المتوقعة في المعدل للإنفاق الإستهلاكي لكل العائلات في المجتمع الفرعي الواحد. ونظراً لأن هذه العوامل الأخرى قد تسير في إتجاهات مختلفة، فتؤثر بشكل مختلف على الإنفاقات الفردية للعائلات، لذلك فإننا نفترض عادة، أن المتغير العشوائي U يتوقف على عامل الصدفة بحيث أن U_1 قد تكون أقل أو أكبر أو مساوية للصفر، وكذلك الحال بالنسبة لقيمة U_2 و U_3 و .....U_K.لكن الوسط الحسابي (Arithmetic Mean) لهذه القيم سوف يساوي صفراً. ونظراً لأن المتغير العشوائي U هو متغير غير منتظم، لذلك لا بدّ من صياغة فروض خاصةٍ به (Assumptions underlying the error term) تمكننا من إدخاله في النموذج الإقتصادي، وحتى نتمكن من إيضاح هذه الفروض بشكل مبسط سنأخذ المثال الآتي:

تقترح النظرية الإقتصادية وجود علاقة دالية بين الكمية المعروضة من سلعةٍ ما وسعر هذه السلعة في السوق. دعنا نفترض أن المتغير المستقل (السعر) هو متغير ثابت في المجتمعات الفرعية، في حين نفترض أن المتغير التابع (العرض) هو متغير عشوائي (Random variable) في المجتمعات الفرعية. بمعنى أننا سنفترض أنه لو ذهبنا إلى السوق واخترنا سعراً ثابتاً وليكن عشرة قروش مثلاً، فإننا سنلاحظ أن الكمية المعروضة من السلعة عند هذا السعر الثابت وفي إحدى المتاجر ستكون متفاوتة في أوقات مختلفة، كذلك فسنلاحظ أن الكمية المعروضة في نفس الوقت لكن في متاجر مختلفة، وعند هذا السعر الثابت، ستكون أيضاً مختلفة، بسبب عوامل أخرى - غير السعر - تؤثر في

الكمية التي يعرضها البائع في وقت محدد أو في متجر محدد. علماً أن هذه العوامل تؤثر في الكمية المعروضة، لكن بشكلٍ عشوائي. فقد تتأثر الكمية المعروضة من السلعة في إحدى المتاجر بإنقطاع الكهرباء الفجائي، في حين تتأثر الكمية المعروضة في متجر آخر بإضراب سائقي الشاحنات بحيث يحول دون وصول السلعة إلى ذلك المتجر ..... الخ.

دعنا نفترض أن السوق الكلي يتضمن خمسة مؤسسات تعرض السلعة Z، ودعنا نفترض أيضاً، أننا تمكنا من تسجيل الكمية المعروضة من السلعة Z، في هذه المؤسسات عندما كان سعر السلعة في السوق يساوي (10) قروش، ثم سجلنا الكمية المعروضة عند السعر الثابت في السوق وقدره (11) قرش، ثم عند السعر الثابت (12) قرش و..... الخ، كما هو مبين في الجدول رقم (١):

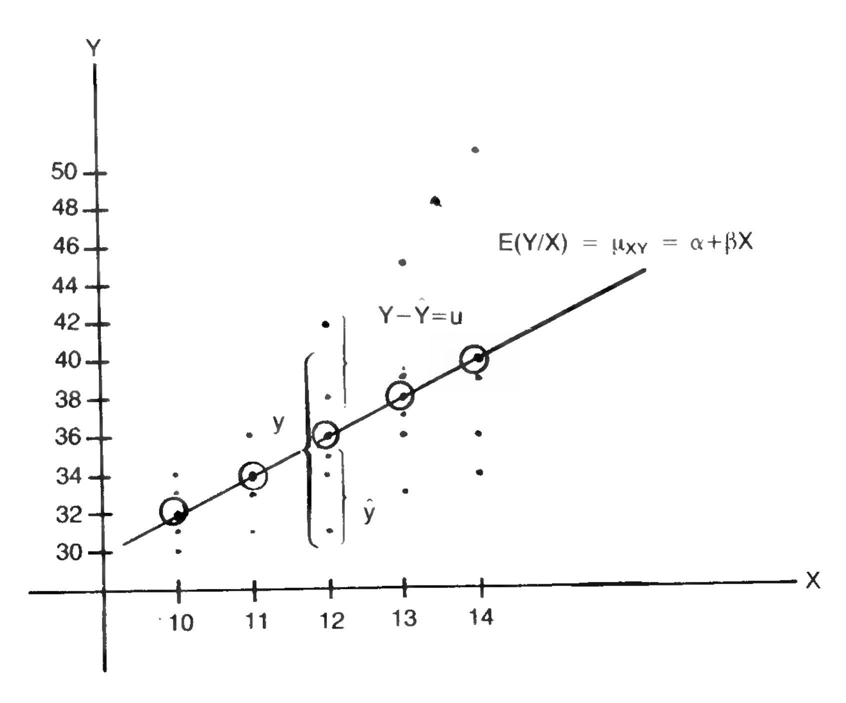
الجدول رقم (١)
سعر السلعة في خمسة أسواق مختلفة، والكمية المعروضة من السلعة Z في خمسة مؤسسات مختلفة ضمن السوق الواحد

المجتمع الفرعي	السعر الثابت X	الكمية المعروضة في السوق الواحد عند السعر الثابت وفي مؤسسات مختلفة Y					الوسط الحسابي للكمية المعروضة عند السعر الثابت، في السوق الواحد E(Y/X)
الأول	10	33	31	32	30	34	32
الثاني	11	31	36	34	33	36	34
الثالث	12	35	34	31	38	42	36
الرابع	13	39	36	37	33	45	38
الخامس	14	34	36	51	39	40	40

نلاحظ في الجدول الفرضي أعلاه أن تصنيف البيانات قائم على أساس أن السعر ثابت في السوق. ففي السوق الأول مثلاً، كان السعر للسلعة Z يساوي (10) قرشاً، وكانت الكمية المعروضة من السلعة Z في نفس الوقت، وفي خمسة مؤسسات مختلفة، كالآتي:

34, 30, 32, 31, 33

أما الوسط الحسابي للكمية المعروضة من السلعة Z في السوق فهو 32. فعلى الرغم من أن سعر السلعة Z في السوق كان (10)قرشاً إلّا أن الكميات المعروضة في السوق كانت متفاوتة حول الوسط الحسابي 32، كذلك كانت الكميات المعروضة من السلعة في السوق الثاني عند السعر الثابت (11) قرشاً، مجمعة حول الوسط الحسابي 34 وهكذا. ويمكننا إيضاح العلاقة بين القيم الفعلية المشاهدة عن الكمية المعروضة والسعر لبيانات الجدول رقم (1) بيانياً كالآتي:



حيث ترمز Y إلى القيمة الفعلية المشاهدة، في حين ترمز $\hat{Y}$ إلى القيمة المتوقعة E(Y/X). ويُطلق على إنحراف (Deviation) القيمة الفعلية المشاهدة Y (The observed value) عن القيمة المتوقعة في المعدل للمجتمع الفرعي E(Y/x) اسم الخطأ العشوائي، ويمكن كتابة القيم الفعلية المشاهدة على أنها مكونة من جزأين: الجزء الأول وهو عبارة عن القيمة المتوقعة، والجزء الثاني وهو عبارة عن الخطأ العشوائي، وبالتالي يمكننا كتابة القيم الفعلية المشاهدة للكمية المعروضة في السوق الأول كالآتي:

Y	E(Y/X)	U = Y − E(Y/X)
33	32	+1
31	32	−1
32	32	0
30	32	−2
34	32	+2
		Σ U=0

$$E(U) = 0$$

الجدير بالذكر، أننا افترضنا وللتبسيط في الشرح، أن السوق الكلي يتكون من خمسة مجتمعات فرعية في كلٍ منها خمسة مشاهدات. إلاّ أن واقع الحياة الإقتصادية تختلف تماماً، حيث يتكون المجتمع الإحصائي من عدد لانهائي من المجتمعات الفرعية ومن المشاهدات (Observations). كما وأن القيمة المتوقعة E(Y/X) = μ_{xy}، هي في الحقيقة قيمة نظرية لا يمكن للباحث قياسها.

فالباحث عادة يحصل على أزواج من المشاهدات (Pairs of observations، $X_1 Y_1$، $X_2 Y_2$، $X_3 Y_3$ و .... $X_K Y_K$ في عينة من البيانات، ويعتبر أن كل زوج من هذه المشاهدات هو عينة عشوائية ممثلة تمثيلاً

صادقاً للمجتمع الفرعي (Representative Random Sample)، ومن ثم فإنه يعمل على تقدير العلاقة الحقيقية في المجتمع الإحصائي من خلال بيانات العينة، مفترضاً بذلك فروضاً خاصة بالمتغير العشوائي، وهي:

أولاً: نفترض أن الخطأ العشوائي هو متغير عشوائي مستقل (Independent random variable) وتعتمد قيمه على عامل الصدفة، فقد يكون موجب أو سالب أو صفر، وبالتالي فإن القيمة المتوقعة في المعدل (الوسط الحسابي) لهذا المتغير تساوي صفراً، ويمكن إيضاح هذه الفرضية كالآتي[1]:

$$Y = \alpha + \beta X + U$$

$$U = Y - \alpha - \beta X$$

$$\Sigma U = \Sigma (Y - \alpha - \beta X)$$

$$\Sigma U = \Sigma Y - \Sigma \alpha - \beta \Sigma X$$

$$\Sigma U = \Sigma Y - n\alpha - \beta \Sigma X$$

$$\Sigma U = \Sigma Y - n (\overline{Y} - \beta \overline{X}) - \beta \Sigma X \ *$$

$$\Sigma U = \Sigma Y - n\overline{Y} + \beta n \overline{X} - \beta \Sigma X$$

$$\Sigma U = \Sigma Y - \Sigma Y + \beta \Sigma X - \beta \Sigma X$$

$$\Sigma U = 0$$

$$E (U) = 0$$

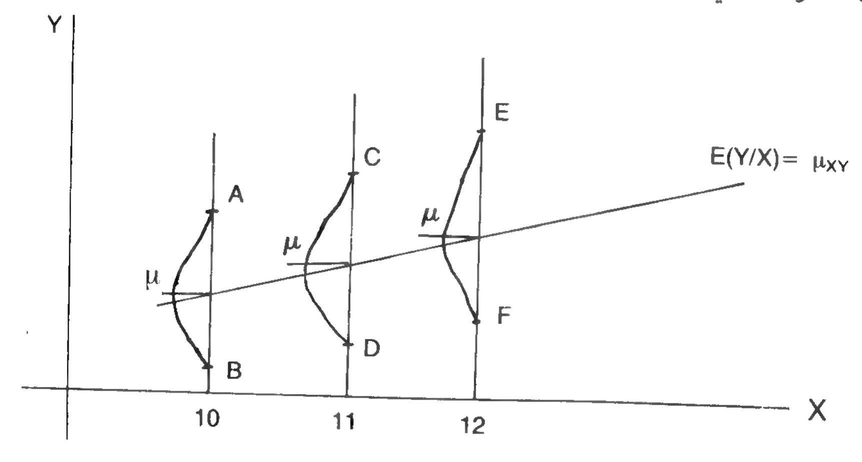
ثانياً: نفترض أن للمتغير العشوائي نفس التباين (Variance) في المجتمعات الفرعية، كما وأن هذا التباين الثابت (Constant variance) للمتغير العشوائي يساوي تباين المتغير التابع Y في المجتمع الإحصائي. ويمكن إيضاح هذه الفرضية كالآتي:

(1) Aigner, P: 25.

* لاحظ أن $\alpha = \overline{Y} - \beta \overline{X}$. انظر في ذلك طريقة المربعات الصغرى ص: ٤٣.

$$Y = E(Y/X) + U$$
$$\sigma_y^2 = E[Y - \mu_{yx}]^2$$
$$\sigma_y^2 = E[Y - E(Y/X)]^2$$
$$\sigma_y^2 = E(U)^2$$
$$\sigma_y^2 = \sigma_u^2 = \sigma_{yx}^2$$

ويمكن إيضاح هذه الفرضية بيانياً لمثالنا السابق عن الكمية المعروضة والسعر كالآتي:



يتضح من الرسم البياني أعلاه أن تشتت (تباين) المتغير العشوائي U، ينحصر ضمن المسافة AB في المجتمع الفرعي الأول، وينحصر ضمن المسافة CD في المجتمع الفرعي الثاني، علماً أن: .... AB = CD = EF. أي أننا نفترض أنه يمكن للمتغير العشوائي أن يأخذ أي قيمة (موجبة، سالبة، أو صفر) ضمن المسافة ....AB = CD = EF وتعرف هذه الخاصية بثبات التباين (Homoscedasticity) في المجتمعات الفرعية.

ثالثاً: نفترض أن المتغير العشوائي يتوزع في كل مجتمع فرعي بشكل التوزيع المعتدل (Normally distributed) حول القيمة المتوقعة E (Y/X). علماً

بأن الهدف من صياغة هذه الفرضية هي إمكانية استخدام الإختبارات الإحصائية (F and-T- Tests) فيما بعد. ذلك أنه لا يمكن إستخدام هذا الإختبارات إلاّ على بياناتٍ لمجتمع احصائي موزع توزيعاً معتدلاً. *

ويمكن صياغة الفروض الثلاثة السالفة الذكر كالآتي:

$$U \sim N(0, \sigma^2)$$

بمعنى أن U تتوزع بشكل معتدل، حيث أن الوسط الحسابي للتوزيع يساوي صفراً كما وأن التباين ثابت.

رابعاً: نفترض إنعدام التغاير (Covariance) بين المتغير العشوائي U والمتغير المستقل X. ويمكن إيضاح هذه الفرضية كالآتي:[(١)]

$$\Sigma XU = \Sigma X\ (Y - \alpha - \beta X)$$

$$\Sigma XU = \Sigma XY - \alpha\Sigma X - \beta\Sigma X^2$$

$$\Sigma XU = \Sigma XY - \Sigma X\ (\overline{Y} - \beta\overline{X}) - \beta\Sigma X^2$$

$$\Sigma XU = \Sigma XY - \overline{Y}\Sigma X + \beta\overline{X}\Sigma X - \beta\Sigma X^2$$

---

* لاحظ أن $\hat{Y} = b_0 + b_1x + e$، بمعنى أن Y هي تركيب خطي للمتغير العشوائي، وبما أن e تتوزع توزيعاً معتدلاً، لذلك فإن Y، وبالتالي b_0 و b_1، تتوزع بشكل معتدل أيضاً، علماً أن e هي تقدير لقيمة U من بيانات العينة.

(١) التغاير هو القيمة المتوقعة في المعدل لحواصل ضرب إنحرافات قيم المتغيرين عن الوسط الحسابي $Cov\ (X,Y) = \frac{\Sigma xy}{n}$ ويستخدم في قياس الإرتباط بين المتغيرين. انظر في ذلك معامل الإرتباط ص: ٦٥

أما البرهان الرياضي أعلاه فهو مقتبس من Aigner ص: 25. علماً أن:

$x = X - \overline{X} \quad , \quad y = Y - \overline{Y}$

$$\Sigma XU = [\ \Sigma XY - \frac{(\Sigma Y)(\Sigma X)}{n}\ ] - \beta\ [\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)(\Sigma X)}{n}\ ]\ ^*$$

$$\Sigma XU = \Sigma xy - \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \cdot \Sigma x^2$$

$$\Sigma XU = 0$$

خامساً: نفترض إنعدام العلاقة بين قيم المتغير العشوائي U_t في الفترة t ، وقيمه في الفترة السابقة U_{t-1} أو اللاحقة U_{t+1}.

سادساً: نفترض عدم وجود أخطاء في قياس المتغير المستقل.

سابعاً: نفترض إنعدام العلاقة القوية (Multicollinearity) بين المتغيرات المستقلة. وهي فرضية تفيد عند استخدام الإنحدار المتعدد.

ثامناً: نفترض أنه لا يوجد أخطاء في تحديد النموذج
(There is no specification error)

تاسعاً: نفترض أنه تم تجميع البيانات الإقتصادية في شكلها الكلي (Aggregation) بشكل صحيح.

إذن نخلص إلى أننا لا نعمل في الإقتصاد القياسي على توقع (تنبؤ) قيمة معينة للمتغير التابع وإنما نعمل على تقدير (Estimate) القيمة المتوقعة في المعدل

---

* لاحظ أن:

$$\Sigma (X-\bar{X})(Y-\bar{Y}) = \Sigma xy = \Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{n}$$

$$\Sigma (X-\bar{X})^2 = \Sigma x^2 = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}$$

$$\beta = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$

كذلك تجدر الإشارة إلى أن التغاير بين الخطأ العشوائي والقيم المتوقعة يساوي صفراً، وذلك بالإعتماد على الفرضية أولاً ورابعاً اعلاه:

$$\Sigma\ \hat{Y}\ e = \Sigma\ (b_0 + b_1X)\ e = b_0\ \Sigma\ e + b_1\ \Sigma\ X\ e = 0$$

$E(Y/X)$ للمجتمع الإحصائي، ونعتمد في ذلك على البيانات الإقتصادية الفعلية والتي تعتبر عينة عشوائية ممثلة للمجتمع الإحصائي بأكمله. ويمكن تلخيص ما سبق ذكره كالآتي:

العلاقة الحقيقة (The True relationship) بين المتغيرين X و Y في المجتمع الإحصائي:

$$Y = \alpha + \beta X + U$$

العلاقة المقدرة (The estimated relationship) بين المتغيرين X و Y من بيانات العينة:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X + e$$

معادلة الإنحدار الحقيقي (The True regression equation) بين المتغيرين X و Y في المجتمع الإحصائي:

$$E(Y/X) = \alpha + \beta X$$

معادلة الإنحدار المقدرة (The estimated regression equation) بين المتغيرين X و Y من بيانات العينة:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X$$

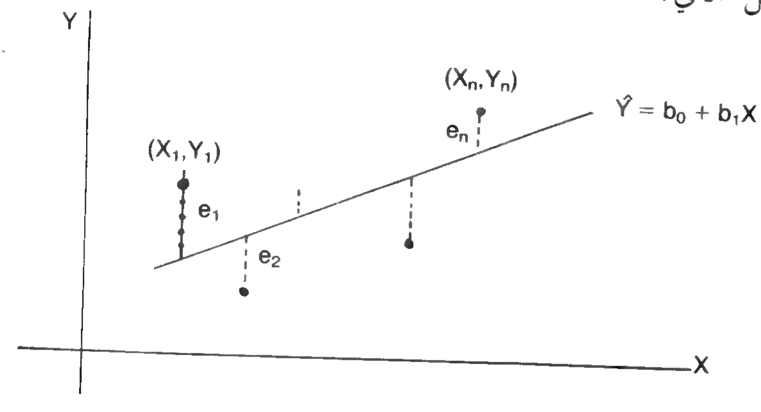
أما المشكلة الأساسية في الإقتصاد القياسي فتنحصر في إيجاد قيم معاملات الإنحدار (The regression coefficients) b_0 و b_1 والتي تعتبر تقديرات (estimates) لقيم المعالم (parameters) α و β في المجتمع الإحصائي.

طريقة المربعات الصغرى (The Method of least squares):

تنص نظرية جاوس ـ ماركوف (The Gaus-Markov Theorem) على

أنه إذا كان المتغير المستقل ثابتاً والمتغير التابع عشوائياً في المجتمعات الفرعية، المتساوية التباين، فإن طريقة المربعات الصغرى تعطي أكفأ تقديرات خطية غير متحيزة (BLUE = Best linear unbiased estimatores) للمعالم α و β في المجتمع الإحصائي*. علماً أن طريقة المربعات الصغرى، هي الطريقة التي ترشدنا إلى إيجاد قيم b_0 و b_1 والتي تجعل مجموع مربعات البواقي عند نهايتها الصغرى.

دعنا نفترض أنه لدينا n من أزواج المشاهدة (pairs of observations) X_1Y_1، $X_2 Y_2$ ... $X_n Y_n$ وأننا نريد أن نوفق أفضل خط للعلاقات بين الظاهرتين X و Y (The best fitting line) كما يتضح في الشكل الآتي:



نلاحظ أنه بالنسبة لأية قيمة في X ولتكن X_1 مثلاً، فإن القيمة الفعلية المشاهدة Y_1 ستختلف عن القيمة المتوقعة $\hat{Y}_1$ والواقعة على خط الإنحدار (The regression line) بالمقدار e_1 والذي يعرف بالبواقي (Residual). ولو أننا أخذنا كل قيم X وأوجدنا الإختلافات e_1 ، e_2 ...... e_n فسنجد أن بعض هذه

* تتميز طريقة المربعات الصغرى (O L S) على طريقة الترجيح الأقصى (Maximum likelihood estimators) في أن الأخيرة تحتاج إلى افتراض أن U يتوزع توزيعاً معتدلاً كما وأنها تعطي تقديرات متحيزة (biased).

الإختلافات موجب، وبعضها سالب وبعضها الآخر يساوي صفراً. أما مجموع قيم الإختلافات $\Sigma (Y - \hat{Y}) = \Sigma e = 0$ فيساوي صفراً. وبإمكاننا أن نقيس مدى جودة توفيق خط العلاقات وذلك بأخذ مجموع مربع الإختلافات:

$$\Sigma (Y - \hat{Y})^2 = \Sigma e^2 = e_1^2 + e_2^2 \ldots$$

فإذا كان حاصل مجموع مربع الإختلافات صغيراً أمكننا حينئذٍ اعتبار أن خط العلاقات يوفق بين النقاط بصورة جيدة. وتُعرف الطريقة التي يمكننا بها اختيار الثوابت b_0 و b_1، بحيث نوفق خط العلاقة $\hat{Y} = b_0 + b_1X$ للبيانات الفعلية، وبشكلٍ يجعل مجموع مربع البواقي (The sum squares of residuals) نهاية صغرى (Minimum) بطريقة المربعات الصغرى. ويتم ذلك بإيجاد الحل للمعادلات الطبيعية (The normal equations) الناتجة عن التفاضل الجزئي (partial derivative) لمجموع مربع البواقي بالنسبة للثوابت b_0 و b_1 وجعل المفاضلة الجزئية مساوية للصفر كالآتي:

$$Y = b_0 + b_1 X + e$$

$$e = Y - b_0 - b_1X$$

$$\Sigma e^2 = \Sigma (Y - b_0 - b_1X)^2$$

$$\frac{\partial \Sigma e^2}{\partial b_0} = 2 \Sigma (Y - b_0 - b_1X) (-1) = 0$$

$$\Sigma Y = b_0 n + b_1 \Sigma X \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \Sigma e^2}{\partial b_1} = 2 \Sigma (Y - b_0 - b_1X) (-X) = 0$$

$$\Sigma XY = b_0 \Sigma X + b_1 \Sigma X^2 \qquad (2)$$

تدعى المعادلتين (1) و (2) بالمعادلات الطبيعية. علماً أنه كان من الممكن الحصول عليهما بسهولة ودون استخدام التفاضل وذلك بإستخدام معادلة الإنحدار:

$$Y = b_0 + b_1X$$

وبجمع طرفي معادلة الإنحدار نحصل على:

$$\Sigma Y = b_0n + b_1 \Sigma X$$

وبضرب طرفي معادلة الإنحدار بالمتغير X وبالجمع نحصل على:

$$\Sigma XY = b_0 \Sigma X + b_1 \Sigma X^2$$

أما الثابت b_0، فيتم الحصول عليه من قسمة طرفي المعادلة (1) على n:

$$\frac{\Sigma Y}{n} = \frac{b_0 n}{n} + b_1 \frac{\Sigma X}{n}$$

$$\bar{Y} = b_0 + b_1 \bar{X}$$

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X} \qquad (3)$$

أما معامل الإنحدار b_1 فيمكن الحصول عليه من المعادلتين (1) و (2) وذلك بإستخدام قاعدة كرايمر (Cramer's rule) في حل معادلات متجانسة في متغيرين اثنين، كالآتي:

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & \Sigma Y \\ \Sigma X & \Sigma XY \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \Sigma X \\ \Sigma X & \Sigma X^2 \end{vmatrix}} = \frac{n\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

$$b_1 = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \qquad (4)$$

حيث أن Σxy تمثل مجموع حواصل ضرب إنحرافات القيم عن الوسط الحسابي للمتغيرين X و Y. كما وأن Σx^2 تمثل مجموع مربع الإنحرافات لقيم المتغير X عن وسطه الحسابي. علماً أن المعادلتين (3) و (4) هي المعادلات الأساسية التي تستخدم عادة في إيجاد قيم معاملات الإنحدار b_0 و b_1.*

* لاحظ أننا لو استخدمنا معادلة الإنحدار في شكل إنحرافات عن الوسط الحسابي (In deviation form) فإن الثابت b_0 عندئذٍ يساوي صفراً في معادلة الإنحدار $y = b_1 x + e$. ويتم الحصول على b_1 بالمفاضلة الجزئية لمجموع مربع البواقي بالنسبة للمعامل b_1 كالآتي:

$$\frac{\partial \Sigma e^2}{\partial b_1} = 2 \Sigma (y - bx)(-x) = 0$$

$$\Sigma xy = b_1 \Sigma x^2$$

$$b_1 = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$

تعرف الثوابت b_0 و b_1 بمعاملات الإنحدار، وتجدر الإشارة هنا إلى ضرورة التمييز بين :

- معامل الإنحدار البسيط ومعامل الإنحدار الجزئي.
- معامل الإنحدار بالوحدات الخام ومعامل الإنحدار بالوحدات المعيارية.*
- معامل الإنحدار للمجتمع الإحصائي ومعامل الإنحدار التقديري من العينة.

بما أن معادلة التوقع $\hat{Y} = b_0 + b_1X$ هي معادلة الخط المستقيم لذلك فإن معاملات الإنحدار تحدد موقع خط الإنحدار حيث تمثل b_0 البعد بين نقطة تقاطع خط الإنحدار مع الإحداثي العمودي Y، ونقطة الأصل **(The origin). أما الثابت b_1 فيمثل ميل المستقيم (The slope)ويقيس معدل التغير في المتغير التابع والمرتبط بتغير وحدة قياس واحدة في المتغير المستقل. وتعتبر b_0 و b_1 تقديرات من بيانات العينة لمعالم الإنحدار α و β في المجتمع الإحصائي. علماً أنه إذا تضمنت معادلة الإنحدار على متغير تابع ومتغير مستقل واحد فإن b_1 تعرف بمعامل الإنحدار البسيط (Simple regression coefficient).أما إذا تضمنت معادلة الإنحدار على أكثر من متغير مستقل، فحينئذٍ يعرف كل من معاملات الإنحدار b_i بمعامل الإنحدار الجزئي (Partial regression coefficient) والذي يقيس معدل التغير في Yنتيجة تغير المتغير المستقل X بوحدة قياس واحدة، مع بقاء أثر بقية المتغيرات المستقلة الأخرى ثابتاً (Keeping The effect of other independent variables constant). أي

---

* يقصد بالوحدات الخام (raw scores) الوحدات التي لم تخضع بعد لأية معالجة إحصائية.

** لاحظ أن أفضل طريقة لرسم خط الإنحدار هو أن نرسم خط مستقيم يصل بين نقطة التقاطع b_0 (The intercept) والنقطة المؤلفة من الإحداثيات $(\bar{X}, \bar{Y})$، وذلك لأنه عند $X=\bar{X}$ فإن $\hat{Y}=\bar{Y}$، ويمكن توضيح ذلك كالآتي:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \bar{X}$$
$$\hat{Y} = \bar{Y} - b_1 \bar{X} + b_1 \bar{X} = \bar{Y}$$

أن معامل الإنحدار الجزئي b_i يستخدم في الإنحدار المتعدد (Multiple regression) ويقيس العلاقة بين ما تبقى من المتغير المستقل (بعد حذف أثر بقية المتغيرات المستقلة منه) وبين المتغير التابع.

تجدر الإشارة إلى أننا كثيراً ما نضطر إلى استخدام متغيراتٍ اقتصادية مقاسة بوحدات قياس مختلفة كأن يقاس السماد بالباوند، وتقاس الأمطار بالإنش، في حين يقاس الحبوب بمكيال مثل البوشل (Bushels)، وبالتالي يصعب على الباحث في مثل هذه الحالة مقارنة معاملات الإنحدار الجزئية b_1 و b_2 ... الخ، لذلك يفضل استخدم معاملات الإنحدار بالوحدات المعيارية (Standard regression coefficients) β وتقرأ بيتا (Beta weights)*.وهنا نلاحظ أنه إذا تمّ قياس المتغيرات الإقتصادية بالوحدات المعيارية (Standard scores) وهي الوحدات المقاسة بالإنحراف المعياري (Standard deviation) مثل $Z_x = \frac{X-\bar{X}}{S_X}$، فإن معاملات الإنحدار الناتجة تعرف بمعاملات الإنحدار بالوحدات المعيارية، مقارنة بمعاملات الإنحدار السالفة الذكر، والتي تعرف بمعاملات الإنحدار بالوحدات الخام (Raw scores regression coefficients)، علماً أن الثابت β_0 بالوحدات المعيارية يساوي صفراً**.

وتكتب معادلة الإنحدار البسيط بالوحدات المعيارية كالآتي:

$$Z_y = \beta Z_x$$

حيث تمثل β معامل الإنحدار البسيط بالوحدات المعيارية، علماً أن:

$$\beta = \frac{\Sigma Z_x Z_y}{\Sigma Z_x^2} = \frac{\Sigma Z_x Z_y}{n-1} = r$$

* يجب التنويه إلى ضرورة الإنتباه إلى أن معامل الإنحدار بالوحدات المعيارية β هو أيضاً تقدير من بيانات العينة لمعامل الإنحدار في المجتمع الاحصائي β، حيث يستخدم الرمز β في الحالتين.

** لاحظ أنه عند استخدام الوحدات المعيارية فإن كل قيمة في المتغير تكون مقاسة في شكل إنحراف عن الوسط الحسابي وبالتالي فإن خط الإنحدار سيمر من نقطة الأصل حيث أن $Z_{\bar{X}} = Z_{\bar{Y}} = 0$ وبالتالي فإن $\beta_0 = Z_{\bar{Y}} - \beta_1 Z_{\bar{X}} = 0$.

وعلى الرغم من أن معامل الإنحدار البسيط بالوحدات المعيارية β، يساوي معامل الإرتباط البسيط r، إلّا أن معامل الإنحدار البسيط بالوحدات المعيارية لن يساوي معامل الإنحدار البسيط بالوحدات الخام إلّا إذا تساوت الإنحرافات المعيارية للمتغيرين X و Y ذلك أن*:

$$b = \beta \frac{S_y}{S_x} = r \frac{S_y}{S_x}$$

$$\beta = r = b \frac{S_x}{S_y}$$

وتقيس β معدل التغير في Y مقاساً بالوحدات المعيارية، فيما لو تغير X بإنحراف معياري واحد. فلو فرضنا أن الإنحراف المعياري لمتغير مستقل (كالأمطار مثلاً) يساوي ثلاثة إنشات $S_x = 3$. وأن الإنحراف المعياري لمتغير تابع (كإنتاج الحبوب مثلاً) يساوي أربعة مكاييل $S_y = 4$. ولو فرضنا أننا حصلنا على $\beta = 0.60$، فحينئذٍ يمكننا القول أنه لو تغيرت الأمطار بإنحراف معياري واحد فإن إنتاج الحبوب سيتغير بمقدار 0.60 من الإنحراف المعياري في Y، بمعنى أنه لو تغير سقوط الأمطار بمقدار 3 إنشات، فإن انتاج الحبوب سيتغير بمقدار $2.40 = 4 \times 0.60$ من المكاييل. علماً أنه إذا تضمنت معادلة الإنحدار على أكثر من متغير مستقل، فإن معاملات الإنحدار بالوحدات المعيارية،

---

* لاحظ أن الوسط الحسابي للقيم المتوقعة $\hat{Y}$ يساوي الوسط الحسابي للقيم الفعلية Y لأن $\Sigma e = 0$ دائماً، كما وأن $\Sigma \hat{Y} = \Sigma (Y+e) = \Sigma Y$، وبالتالي فإن $\bar{\hat{Y}} = \bar{Y}$. أما تباين القيم المتوقعة $S_{\hat{Y}}^2$ فيساوي:

$$S_{\hat{Y}}^2 = \frac{1}{n} \Sigma (\hat{Y} - \bar{Y})^2 = \frac{1}{n} \Sigma (b_0 + b_1 X - \bar{Y})^2$$

$$S_{\hat{Y}}^2 = \frac{1}{n} \Sigma (\bar{Y} - b_1 \bar{X} + b_1 X - \bar{Y})^2 = \frac{1}{n} \Sigma [b_1 (X - \bar{X})]^2$$

$$S_{\hat{Y}}^2 = b_1^2 \frac{\Sigma (X - \bar{X})^2}{n} = b_1^2 S_x^2$$

وبقسمة طرفي المعادلة على التباين الكلي للمتغير التابع S_y^2 نحصل على:

$$r^2 = \frac{S_{\hat{Y}}^2}{S_y^2} = b_1^2 \frac{S_x^2}{S_y^2}$$

انظر في ذلك Aigner P: 29

تعرف عندئذٍ باسم معاملات الإنحدار الجزئية بالوحدات المعيارية (Standard partial regression coefficients)، ويقيس كل منها معدل التغير في Y نتيجة تغير X بإنحراف معياري واحد، مع بقاء أثر بقية المتغيرات المستقلة الأخرى ثابتاً.

وتجدر الإشارة أخيراً، إلى أنه يمكننا كتابة المعادلات الطبيعية في شكل مصفوفات (Matrices) كالآتي:

$$Y = Xb + e$$

حيث يمكن الحصول على معاملات الإنحدار باستخدام المصفوفات كالآتي:

$$b = (X'X)^{-1} (X'Y)$$

علماً أن $(X'X)^{-1}$ هي مقلوب مصفوفة التباين والتغاير للموجه X[1].

الخصائص الإحصائية لتقديرات المربعات الصغرى:

تتميز التقديرات التي نحصل عليها من بيانات العينة بإستخدام طريقة المربعات الصغرى بأنها أكفا (best) تقديرات خطية (Linear) غير متحيزة (Unbiased) للمعالم α و β في المجتمع الإحصائي. ويعود السبب في ذلك إلى أن b هي تركيب خطي (Linear combination) للقيم الفعلية للمتغير التابع Y. فمن المعلوم أن*:

$$b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$

(1) Drapper & Smith., "Applied regression Analysis". John Wiley & Sons, Inc., 1966. PP: 44-52.

وتجدر الإشارة إلى أننا سوف نتناول كيفية صياغة المعادلات الطبيعية في شكل مصفوفات وبالتفصيل في الفصل الثالث ص ص: ١٠٩-١١١.

* سيتم التركيز على الخصائص الإحصائية للمعامل b_1 دون b_0، لأن b_1 أكثر أهمية في الإقتصاد القياسي من b_0.

ونظراً لأن المتغير المستقل X هو متغير ثابت في المجتمعات الفرعية لذلك فإنه يمكن اعتبار القيمة $\frac{x}{\Sigma x^2}$ مساوية إلى التثقيل (weight)، والذي يرمز له بالحرف ω فتصبح b مجموعاً مرجحاً (Weighted sum) لقيم المتغير التابع[1]:

$$b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$

$$b = \Sigma\ \omega\ y$$

$$b = \Sigma\ \omega\ (Y - \overline{Y})$$

$$b = \Sigma\ \omega\ Y - \overline{Y}\ \Sigma\ \omega$$

$$b = \Sigma\ \omega\ Y - \overline{Y}\ \frac{\Sigma x}{\Sigma x^2}$$

ونظراً لأن $\Sigma x = 0$ ، إذن:

$$b = \Sigma\ \omega\ Y$$

بمعنى أن قيم Y مستقلة من الناحية الإحصائية (Statistically independent)، فلو كانت Y_1 كبيرة فإن Y_2 قد تكون كبيرة أو صغيرة أو صفراً، وفي حالة سحب عينات معادة (Repeated random samples) من نفس المجتمع الإحصائي للمتغير Y حيث تكون X ثابتة فإن قيم Y تكون مستقلة وبالتالي فإن:

$$b = \omega_1\ Y_1 + \omega_2\ Y_2 + \omega_3\ Y_3\ ... + \omega_n\ Y_n$$

$$b = \Sigma\ \omega\ Y$$

$$E(b) = E\ (\Sigma\ \omega\ Y)$$

$$E(b) = \Sigma\ \omega\ E(Y)$$

$$E(b) = \Sigma\ \omega\ (\alpha + \beta X)$$

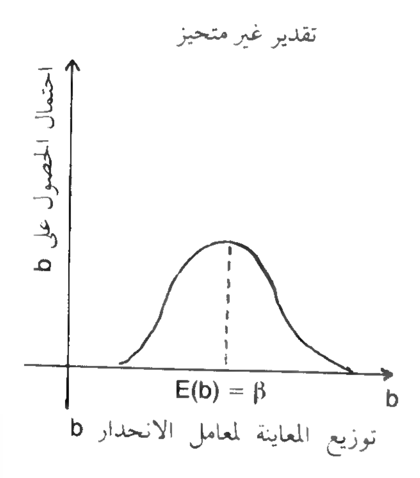
---

(١) انظر: Wonnacott & Wonnacott PP: 19-20

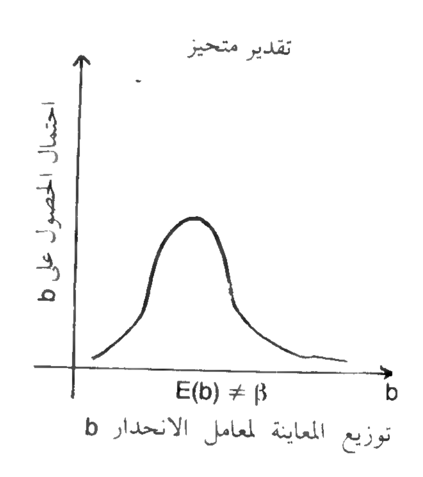
$$E(b) = \alpha \Sigma \omega + \beta \Sigma \omega X$$

$$E(b) = \beta \; *$$

بمعنى أن b هي تقدير غير متحيز (Unbiased estimate)لقيمة معامل الإنحدار β في المجتمع الإحصائي، بمعنى أن القيمة المتوقعة (Expected value) لتوزيغ المعاينة (Sampling distribution)للمعامل b يساوي إلى قيمة β في المجتمع الإحصائي، ويمكن توضيح ذلك بيانياً كالآتي:



توزيع المعاينة لمعامل الانحدار b



توزيع المعاينة لمعامل الانحدار b

---

* لاحظ أن:

$$\Sigma \omega = \Sigma \frac{x}{\Sigma x^2} = \frac{\Sigma x}{\Sigma x^2} = 0$$

$$\Sigma \omega X = \Sigma \frac{x}{\Sigma x^2} . X = \frac{\Sigma (X-\bar{X}).X}{\Sigma x^2}$$

$$\Sigma \omega X = \frac{\Sigma X^2 - \bar{X}\Sigma X}{\Sigma x^2} = 1$$

لاحظ أيضاً أنه كان من الممكن إثبات أن b هي تقدير غير متحيز لقيمة β كالآتي:

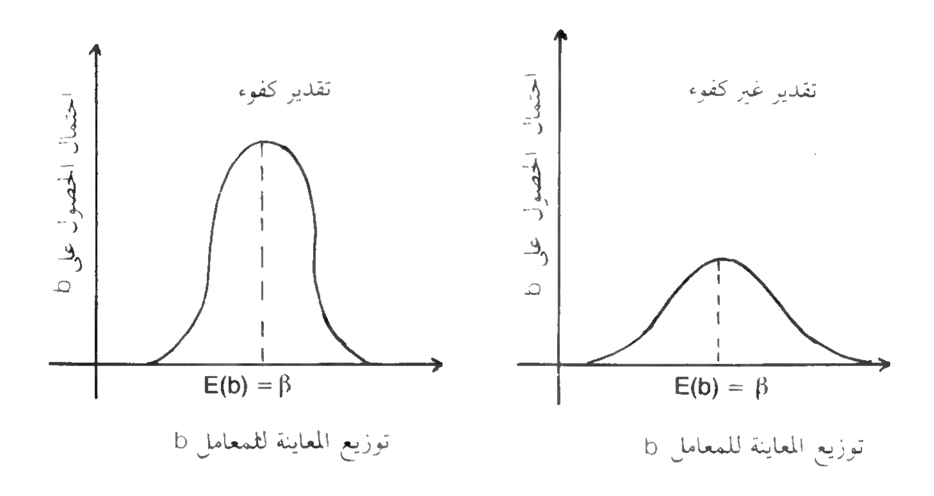
$$b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{\Sigma x(\beta x + e)}{\Sigma x^2}$$

$$b = \frac{\beta \Sigma x^2}{\Sigma x^2} + \frac{\Sigma xe}{\Sigma x^2}$$

$$E(b) = \beta$$

علماً أنه، عندما يقال أن b هي تقدير غير متحيز لقيمة β، فهذا لا يعني أن b=β، في كل عينة عشوائية مسحوبة من المجتمع الإحصائي، لكن عند سحب عينات عشوائية مُعادة من نفس المجتمع الإحصائي، فإن الوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للمعامل b سوف يساوي إلى قيمة المعامل الحقيقي في المجتمع الإحصائي β.

وتتميز التقديرات لطريقة المربعات الصغرى بأنها أكثر كفاءة (best unbiased = efficient) من بين كل التقديرات غير المتحيزة*. ويمكن توضيح ذلك بيانياً كالآتي:



توزيع المعاينة للمعامل b　　　　توزيع المعاينة للمعامل b

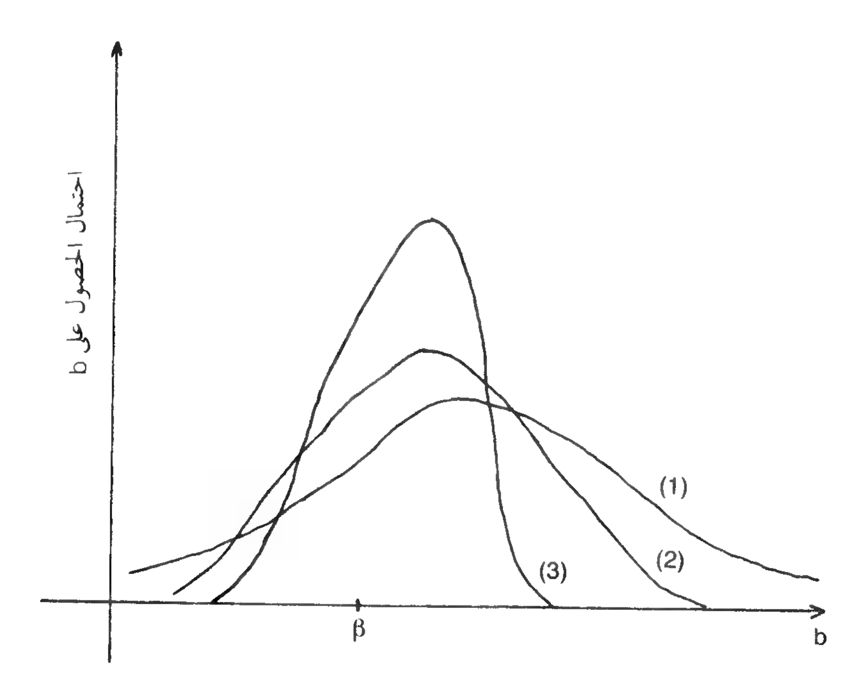
ويتميز التقدير الكفوء بأنه أقل تبايناً (Variance) من التقدير غير الكفوء، وهذا يعني أن فترة الثقة ستكون أصغر (Smaller confidence interval)، وبالتالي فيوجد إحتمال أكبر للحصول على نتائج جوهرية من الناحية الإحصائية

---

* لاحظ مثلاً: أنه يقال في الإحصاء بأن الوسط الحسابي (Arithmetic mean) أكثر كفاءة من الوسيط (Median)، وذلك على الرغم من أن القيمة المتوقعة لتوزيع المعاينة، للوسط الحسابي أو للوسيط، تساوي قيمة الوسط الحسابي في المجتمع الإحصائي، وذلك لأن تباين توزيع المعاينة للأوساط الحسابية يكون أقل من تباين توزيع المعاينة للوسيط.

(Statistically significant). وبإختصار يمكننا القول أنه إذا حصلنا على التقديرات غير المتحيزة $b_0 + b_1X$ بطريقة المربعات الصغرى فإنه عند سحب عينات مُعادة من نفس المجتمع الإحصائي، فإن تشتت خطـوط الإنحـدار $b_0 + b_1x$ حول خط الإنحدار الحقيقي $\alpha+\beta X$، سيكون أقل من تشتت خطوط الإنحدار غير المتحيزة $c + dx$ والتي تمّ الحصول عليها بطريقة أخرى غير طريقة المربعات الصغرى.

وتجدر الإشارة أخيراً إلى أن تقديرات المربعات الصغرى تتميز بكونها تقترب من القيمة الحقيقية β في المجتمع الإحصائي بازدياد حجم العينة (Consistent estimator). فكلما زاد حجم العينة كلما اقتربت قيمة b من قيمة β (asymtotic unbiased estimator) كما يتضح في الرسم البياني الآتي:



نلاحظ في الرسم البياني أعلاه أنه تمّ الحصول على التوزيع (١) عندما كانت n صغيرة، ثم عندما أصبحت n كبيرة حصلنا على التوزيع (2) وعندما

أصبحت n كبيرة جداً حصلنا على التوزيع (3)، ويمكننا القول أنه كلما أصبح حجم العينة كبيراً، كلما اقتربت قيمة b من قيمة β.

دعنا نفترض للتبسيط أن أحد الباحثين يرغب في دراسة علاقة استهلاك الإسمنت بالناتج القومي، لبعض الدول العربية فجمع البيانات الموضحة في الجدول رقم (2):

الجدول رقم (2)

الناتج القومي الاجمالي بسعر السوق (مليون دولار)، واستهلاك الاسمنت (ألف طن) لبعض الدول العربية عام 1978[1]

البلد	الناتج القومي الاجمالي X	استهلاك الاسمنت Y
الجزائر	22567.6	4021
العراق	23124.4	6196
الامارات العربية	13778.2	2394
الكويت	15281.3	2372
السعودية	65815.6	8962
ليبيا	19045.7	3182
البحرين	1877.1	598
تونس	5963.5	1672
سوريا	8277.3	3000
مصر	24715.2	3808
الأردن	1856.4	1192
المغرب	12427.1	3504
السودان	6458.6	435
موريتانيا	620.3	65
اليمن الشمالي	2618.5	136

$$\hat{Y} = 718.07 + 0.137X$$

$$r^2 = 0.86$$

(١) "التقرير الاقتصادي العربي الموحد" الصادر عن: الأمانة العامة لجامعة الدول العربية، =

نلاحظ في الجدول أعلاه أن 86% من الاختلافات الكلية لاستهلاك الاسمنت في الدول العربية ثم تحديدها (تفسيرها) عن طريق معرفتنا بالاختلافات الكلية في الناتج القومي الاجمالي لهذه الدول. أما فيما يتعلق بمعاملات الانحدار فيجب الانتباه إلى أن البيانات أعلاه مأخوذة في نقطة زمنية محددة (Cross-section data)، فهي ليست بيانات لسلاسل زمنية (Time series data)، ويمكن تفسير معامل الانحدار $\beta = 0.137$ على أنه إذا زاد الناتج القومي الإجمالي لاحدى الدول العربية على دولة أخرى، بوحدة قياس واحده، فإن استهلاكها المتوقع من الاسمنت، سيزيد عن تلك الدولة بمقدار 0.137 من وحدة القياس، آخذين في الاعتبار أن وحدات القياس للمتغيرين X وY مختلفة، حيث أن وحدة القياس للمتغير Y تساوي ألف طن، في حين أن وحدة القياس للمتغير X تساوي مليون دولار، وبالتالي يمكننا القول، أنه إذا زاد الناتج الإجمالي لدولة عربية على دولة أخرى بمقدار مليون دولار، فإن الاستهلاك المتوقع من الاسمنت لهذه الدولة، سيزيد على الدولة الأخرى بمقدار 137 طن. أما فيما يتعلق بنقطة التقاطع $\alpha = 718.07$، فتفسر على أنها الاستهلاك المتوقع من الاسمنت بالألف طن عندما يكون الناتج القومي الاجمالي مساوياً للصفر $X = 0$، علماً بأن α لا تفيد كثيراً في التفسير وإنما تفيدنا في تحديد موقع خط الانحدار.* وتجدر الإشارة هنا إلى أننا استعملنا α و β بدلاً من b_0 و b_1 في المثال أعلاه بهدف الشرح والتبسيط، حيث اعتبرنا أن البيانات في الجدول رقم (2) تمثل بيانات المجتمع الإحصائي بأكمله.

دعنا نفترض أننا نرغب في سحب عينات عشوائية كلٍ منها مكون من

= صندوق النقد العربي، الصندوق العربي للإنماء الاقتصادي والاجتماعي عام 1981 ص 190 و 208.

* انظر في نهاية هذا الفصل إلى الطرق المختلفة التفصيلية للحصول على معاملات الانحدار والارتباط والتحديد. كما وتجدر الإشارة إلى أنه لو كانت هذه البيانات لسلاسل زمنية (Time series data) فحينئذٍ تفسر β على أنها معدل التغير المتوقع في Y نتيجة تغير X بوحدة قياس واحدة (بفترة زمنية واحدة).

ثلاثة مشاهدات من هذا المجتمع الإحصائي للدول العربية، فباستطاعتنا حينئذٍ سحب $\binom{15}{3} = 455$ عينة عشوائية، وصياغة 455 معادلة لانحدار استهلاك الأسمنت على الناتج القومي الإجمالي، لكننا سنكتفي وللتبسيط في الشرح، بسحب أربعة عينات فقط كما هو مبين في الجدول رقم (3).

يتضح من هذا الجدول ، أن قيم معاملات الانحدار b للعينات تختلف عن قيمة معامل الانحدار في المجتمع الاحصائي β، ولو أننا لم نكتف بالعينات الأربعة وأوجدنا قيم معاملات الانحدار لكل العينات التي يمكن سحبها من المجتمع الإحصائي لوجدنا أنه نادراً ما تتساوى قيمة b وقيمة β، كما وأن ابتعاد قيمة b عن قيمة β قد يكون كبيراً جداً. لكن الجدير بالذكر أن تباين (variance) توزيع المعاينة للمعامل (The sampling distribution of b) يتضاءل كلما زاد حجم العينة. ولو فرضنا أننا نرغب في زيادة حجم العينة من ثلاثة مشاهدات إلى سبعة مشاهدات، فباستطاعتنا حينئذٍ سحب 6435 = $\binom{15}{7}$ عينة عشوائية وسنكتفي للتبسيط بسحب أربعة عينات كما يتضح في الجدول رقم (4):

الجدول رقم (3)

I		II		III		IV	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
8277.3	3000	22567.[illegible]	4021	15281.3	2372	13778.2	2394
12427.1	3504	24715.7	3808	19045.7	3182	5963.5	1672
620.3	65	1856.4	1192	5963.5	1672	8277.3	3000
$\hat{Y} = 37.61 + 0.302X$		$\hat{Y} = 986.57 + 0.123X$		$\hat{Y} = 961.41 + 0.108X$		$\hat{Y} = 1835.49 + 0.056X$	
$b_1 = 0.302$		$b_1 = 0.123$		$b_1 = 0.108$		$b_1 = 0.056$	

$\beta = 0.137$

الجدول رقم (4)

I		II		III		IV	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
22567.6	4021	23124.4	6196	1877.1	598	13778.2	2394
13778.2	2394	13778.2	2394	5963.5	1672	65815.6	8962
65815.6	8962	15281.3	2372	8277.3	3000	1877.1	598
1877.1	598	61815.6	8962	24715.2	3808	8277.3	3000
8277.3	3000	19045.7	3182	1856.4	1192	1856.4	1192
1856.4	1192	1877.1	598	12427.1	3504	6458.4	435
6458.6	435	620.3	65	6458.6	435	2618.5	136
$\hat{Y} = 756.11 + 0.1269X$		$\hat{Y} = 569.27 + 0.1459X$		$\hat{Y} = 776.75 + 0.142X$		$\hat{Y} = 527.14 + 0.129X$	
$b_1 = 0.13$		$b_1 = 0.15$		$b_1 = 0.142$		$b_1 = 0.129$	

$\beta = 0.137$

من مقارنة الجدولين (3) و (4) يتضح أن زيادة حجم العينة يؤدي إلى اقتراب قيمة معامل الإنحدار للعينة b من قيمة معامل الإنحدار في المجتمع الإحصائي β، مما يدل على أن زيادة حجم العينة يجعل منحنيات الإنحدار للعينات $(b_0 + b_1X)$ قريبة من منحنىٰ الإنحدار $(\alpha + \beta X)$ للمجتمع الإحصائي[1].

يتضح مما سبق ذكره، أنه كلما كبر حجم العينة كلما اقتربت خطوط الإنحدار للعينات من خط الإنحدار الحقيقي للمجتمع الإحصائي. ويثار التساؤل التالي: هل يوجد مقياس محدد يقيس تشتت قيم b حول β مهما كان حجم العينة؟ لا شك أن أفضل مقياس لتشتت قيم b حول β هو تباين معامل الانحدار b والذي يرمز له بالرمز σ_b^2 فإذا كان σ_b^2 صغيراً أمكننا القول أننا حققنا جودة في توفيق منحنىٰ الانحدار والعكس صحيح*.

معامل التحديد (Coefficient of determination)

لا شك أن موضوعي الارتباط والانحدار هما موضوعان متشابهان للغاية فعندما يريد الباحث دراسة انحدار المتغير التابع Y (الكمية المعروضة مثلاً) على المتغير المستقل X (السعر مثلاً)، فإنه في الحقيقة يعني كيفية تفسير (شرح)

---

(١) تجدر الإشارة إلى أن فكرة الانحدار (Regression) تعود تاريخياً إلى العالم غالتون (Galton). فقد لاحظ غالتون في بحوثه عن الوارثة (Inheritance) أنه لو افترضنا أن طوال القامة يتزوجون من طوال القامة مثلهم، وأن قصار القامة سيتزوجون قصاراً مثلهم، فحينئذٍ سيلد طوال القامة، طوالاً مثلهم وسيلد قصار القامة قصاراً مثلهم، وينقسم المجتمع عندئذٍ إلى مجموعتين، بحيث تتضمن المجموعة الأولى على العمالقة، في حين تتضمن المجموعة الثانية على الأقزام. لكن غالتون لاحظ أنه عبر الأجيال، فإن الأحفاد من المجموعتين تنحدر في طول قامتها نحو الوسط الحسابي للطول في المجتمع الإحصائي. ومن ظاهرة اتجاه الطول نحو الوسط الحسابي (Regression toward mediocrity) اشتقت كلمة الانحدار. انظر:
Fred N Kerlinger and Elazar J. pedhazur., «Multiple Regression in Behavioral Research». Holt, Rinhart and Winston, Inc., 1973, P.: 18.

* انظر فترة الثقة ص: ٦٧.

التباين (Variance) أو الاختلافات (Variation) في المتغير التابع عن طريق معرفته بالاختلافات أو التباين في المتغير المستقل*.

إحصائياً، لو أردنا التنبؤ بقيم المتغير التابع Y من المتغير المستقل X، فإن القدرة على التنبوء تتوقف على معامل الارتباط بين المتغيرين X و Y. فإذا كانت قيمة الارتباط بين المتغيرين صفراً، فحينئذٍ يمكن لكل قيمة من المتغير المستقل، أن تهدينا للتنبوء إلى الوسط الحسابي (The mean) من المتغير التابع Y حيث تصبح $\bar{Y}$ أفضل قيمة ممكن التنبؤ بها في هذه الحالة. أما إذا كانت قيمة معامل الارتباط بين الصفر $r = 0.0$ وبين الواحد الصحيح $r = \pm 1.0$ فحينئذٍ تزيد القدرة على التنبوء بشكل أفضل مما كان عليه عندما $r = 0.0$. أما إذا كان معامل الارتباط مساوياً للواحد الصحيح $r = \pm 1.0$، فحينئذٍ تصبح لدى الباحث قدرة تامة على التنبوء بقيم المتغير التابع Y من قيم المتغير المستقل X بدون أخطاء**.

يُعرف مجموع مربع الانحرافات الكلية (Total sum of squares) لقيم المتغير التابع Y عن الوسط الحسابي $\bar{Y}$ بالاختلافات الكلية (Total variation) في المتغير التابع، الذي يراد تفسيره عن طريق معرفتنا بالاختلافات الكلية لمتغير أو أكثر من المتغيرات المستقلة، ويرمز له بالرمز SS_t. ويتكون الاختلاف الكلي من اختلاف مفسر (Explained variation) ومن اختلاف غير مفسر

---

* التباين لأي متغير هو عبارة عن حاصل قسمة الاختلافات الكلية على درجات الحرية (degree of freedom)، ومثال ذلك تباين المتغير التابع Y:

$$\sigma_y^2 = \frac{\Sigma (Y - \bar{Y})^2}{n - 1}$$

**يقصد بالتنبؤ (Prediction) استخدام تحليل الانحدار (Regression analysis) في توقع (تقدير) القيمة المتوقعة للمتغير التابع E (Y/X) من خلال معرفتنا بقيمة متغير أو أكثر من المتغيرات المستقلة. ويعتبر التنبؤ جزءاً لا يتجزأ من تفسير الظواهر (Explanation)، ويختلف التنبؤ عن التكهن (Forcasting) في أن التنبؤ هو تعبير شرطي (Conditional) بمعنى أنه إذا كان لدينا قيمة معينة للمتغير X فحينئذٍ يمكننا توقع $\hat{Y}$ باستخدام معادلة الانحدار.

(Unexplained variation)، أما الاختلاف المفسر فهو ذلك الجزء من الاختلاف الكلي في المتغير التابع Y والذي تم تحديده [illegible]
له بالرمز [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
المستقل X.

(The variation in Y which remains unexplained by the estimated relationship between X and Y).

ويعرف الإختلاف غير المفسر بالبواقي (Residuals) ويرمز له بالرمز [illegible]
فمن المعلوم أن:

$$Y = b_0 + b X + e$$

$$\hat{Y} = b_0 + b X$$

$$\hat{Y} = \bar{Y} - b \bar{X} + b X$$

$$\hat{Y} = \bar{Y} + b (X - \bar{X}) \qquad (1)$$

وبطرح طرفي المعادلة (1) من Y نحصل على:

$$Y - \hat{Y} = Y - \bar{Y} - b (X - \bar{X}) \qquad (2)$$

وبتربيع طرفي المعادلة (2)والجمع نحصل على:

$$\Sigma (Y - \hat{Y})^2 = \Sigma [(Y - \bar{Y}) - b (X - \bar{X})]^2$$

$$\Sigma (Y - \hat{Y})^2 = \Sigma (Y - \bar{Y})^2 + b^2 \Sigma (X - \bar{X})^2 - 2 b \Sigma (Y - \bar{Y}) (X - \bar{X}) \qquad (3)$$

علماً أن الحد الأخير من المعادلة (3) يساوي:

$$-2 b \Sigma (Y - \bar{Y}) (X - \bar{X}) = -2 b . b \Sigma (X - \bar{X})^2$$

ذلك لان:

$$b = \frac{\Sigma (Y-\bar{Y})(X-\bar{X})}{\Sigma (X-\bar{X})^2}$$

وباستبدال الحد الأخير في المعادلة (3) بقيمته نحصل على:

$$\Sigma (Y - \hat{Y})^2 = \Sigma (Y - \bar{Y})^2 + b^2 \Sigma (X - \bar{X})^2 - 2 b^2 \Sigma (X - \bar{X})^2$$

$$\Sigma (Y - \hat{Y})^2 = \Sigma (Y - \bar{Y})^2 - b^2 \Sigma (X - \bar{X})^2 \qquad (4)$$

لكننا نعلم من المعادلة (1) أن:

$$b^2 \Sigma (X - \bar{X})^2 = \Sigma (\hat{Y} - \bar{Y})^2$$

وباستبدال هذه القيمة في المعادلة (4) نحصل على:

$$\Sigma (Y - \hat{Y})^2 = \Sigma (Y - \bar{Y})^2 - \Sigma (\hat{Y} - \bar{Y})^2$$

إذن:

$$\Sigma (Y - \bar{Y})^2 = \Sigma (\hat{Y} - \bar{Y})^2 + \Sigma (Y - \hat{Y})^2 \qquad (5)$$

↓ ↓ ↓

الاختلافات غير المفسرة + الاختلافات المفسرة = الاختلافات الكلية في المتغير التابع

وبقسمة طرفي المعادلة (5) على مجموع مربع الإختلافات الكلية للمتغير التابع نحصل على:

$$\frac{\Sigma (Y-\bar{Y})^2}{\Sigma (Y-\bar{Y})^2} = \frac{\Sigma (\hat{Y}-\bar{Y})^2}{\Sigma (Y-\bar{Y})^2} + \frac{\Sigma (Y-\hat{Y})^2}{\Sigma (Y-\bar{Y})^2}$$

علماً أن نسبة الإختلافات المفسرة إلى الإختلافات الكلية تعرف بمعامل التحديد R^2، أي أن:

$$R^2 = \frac{\Sigma (\hat{Y}-\bar{Y})^2}{\Sigma (Y-\bar{Y})^2} = 1 - \frac{\Sigma (Y-\hat{Y})^2}{\Sigma (Y-\bar{Y})^2} \qquad (6)$$

يتضح من المعادلة (6) أعلاه أن أقصى قيمة (Maximun value) والتي يمكن لمعامل التحديد أن يأخذها هي الواحد الصحيح $R^2 = 1.0$ ، وذلك عندما $\hat{Y} = Y$ حيث تنعدم الأخطاء في التوقع (التنبؤ)، كما وأن أدنى قيمة (Minimum value) لمعامل التحديد هي الصفر $R^2 = 0.0$ عندما $\hat{Y} = \overline{Y}$ حيث يكون $\overline{Y}$ أفضل قيمة يمكننا التنبؤ بها في حالة إنعدام العلاقة بين المتغيرين X و Y.

تجدر الإشارة أخيراً إلى أن الجذر التربيعي لمعامل التحديد يعطي معامل الإرتباط $\sqrt{R^2} = \mp r$ ، كما وأن الإشارة (Sign) الجبرية لمعامل الإرتباط تكون مساوية للإشارة الجبرية لمعامل الإنحدار، لذلك فباستطاعة الباحث أن يكتفي في تحليله بالحصول على معامل الإنحدار لمعرفة إتجاه (Direction) العلاقة بين المتغيرين، وبالحصول على معامل التحديد لمعرفة نسبة الإختلافات المفسرة من الإختلافات الكلية.

معامل الارتباط البسيط (The simple correlation coefficint):

يقصد بالإرتباط بشكل عام وجود علاقة، لكن المعنى الإحصائي للإرتباط (Correlation)، هو أوسع من كلمة علاقة (Relationship)، لأنه يعني دراسة التغاير (Covariance) بين المتغيرات، أي دراسة العلاقة بين تراتيب قيم المتغير X وتراتيب قيم المتغير Y.

دعنا نفترض للتبسيط أننا نتعامل مع المتغيرات في شكل إنحرافات عن الوسط الحسابي (Deviation scores) حيث تكون $b_0 = 0.0$، وبالتالي يمكننا كتابة معادلة الإنحدار في شكل إنحرافات كالآتي:

$$\hat{y} = bx$$

ونظراً لأن معامل التحديد يساوي:

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma\ (Y - \hat{Y})^2}{\Sigma\ (Y - \overline{Y})^2}$$

إذن :

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma (y - bx)^2}{\Sigma y^2}$$

$$R^2 = \frac{\Sigma y^2 - \Sigma (y - bx)^2}{\Sigma y^2}$$

$$R^2 = \frac{\Sigma y^2 - \Sigma y^2 + 2b\Sigma xy - b^2\Sigma x^2}{\Sigma y^2}$$

ونظراً لأن :

$$b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$

$$\Sigma xy = b\Sigma x^2$$

$$b\Sigma xy = b^2\Sigma x^2$$

إذن* :

$$R^2 = b^2 \frac{\Sigma x^2}{\Sigma y^2} = b \cdot \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \cdot \frac{\Sigma x^2}{\Sigma y^2} = b \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}$$

وباستبدال b بقيمتها نحصل على:

$$R^2 = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \cdot \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}$$

$$R^2 = b_{yx} \cdot b_{xy}\text{**}$$

$$r = \sqrt{b_{yx}.b_{xy}} = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 . \Sigma y^2}}$$

---

* تشير المعادلة $R^2 = b \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}$ إلى أن زيادة أي متغير مستقل إلى معادلة الإنحدار سيعني بالضرورة ارتفاع قيمة معامل التحديد، فلو وُجد متغيرين مستقلين، في معادلة الإنحدار مثلاً، لكان معامل التحديد $R^2 = \frac{b_1\Sigma x_1 y + b_2\Sigma x_2 y}{\Sigma y^2}$ .. انظر ص ص ١١٥-١١٦ من هذا المؤلف.

** تشير b_{yx} إلى معامل إنحدار المتغير التابع Y على المتغير المستقل Xفي معادلة الإنحدار$Y=F(X)$ =

وتجدر الإشارة أنه يوجد أضافةً إلى الصيغة الموضحة أعلاه، صيغ أخرى لإيجاد معامل الإرتباط أهمها $r = \frac{\Sigma Z_x Z_y}{n - 1}$، والتي تستعمل في حالة التعامل مع القياسات في شكل وحدات معيارية (Standard scores).

تجدر الإشارة أخيراً إلى ضرورة أخذ الحيطة والحذر، عند تفسير معامل الإرتباط البسيط بين المتغيرات الإقتصادية. فالإرتباط لا يعني السببية (Causation)، أي أن وجود ارتباط بين متغيرين لا يعني وجود سبب (Cause) ونتيجة (Effect)فكثيراً ما نحصل على إرتباط زائف (Spurious correlation) بين متغيرين، تنعدم قيمته أو تزيد بإدخال الرقابة الإحصائية (Statistical control). فلو فرضنا على سبيل المثال أن معامل الإرتباط بين رواتب المدرسين وبين استهلاك النبيذ خلال حقبة زمنية معينة كان $r = 0.98$، فهذا لا يعني أن المدرسين يشربون النبيذ، كما وأن وجود الإرتباط لا يعني أن استهلاك النبيذ يتزايد مع تزايد رواتب المدرسين، فالعلاقة الموجودة هي علاقة زائفة ناتجة عن تأثر كِلا المتغيرين بمتغير ثالث وهو الزمن، وبشكلٍ أدق فإن كِلا المتغيرين، يتأثران بإزدياد الدخل القومي، وعندما نستبعد أثر المتغير الخارجي (الزمن) فإن العلاقة بين المتغيرين قد تنعدم وتصل إلى الصفر*.

فترة الثقة (Confidence interval):

يلجأ الباحث عادة إلى استعمال بيانات إحصائية من العينة، وذلك ليتمكن من عمل استدلالات عن معالم المجتمع الإحصائي. علماً أنه بناء على نظرية النزعة المركزية (The central limit theorem)، فإن توزيع المعاينة

في حين تشير b_{xy} إلى معامل إنحدار المتغير التابع X على المتغير المستقل Y في معادلة الإنحدار $X = b_0 + b_1Y$. حيث يُعامل كلٍ من المتغيرين على أنه مستقل تارةً وتابع تارة أخرى.

* انظر معامل الإرتباط الجزئي والنصف حزئي ص ص: ١٢١-١٢٣

(The sampling distribution) لأكثر الظواهر يكون معتدلاً (Normally distributed).

لنفرض أنه لدينا عينة عشوائية مكونة من (n) من المشاهدات (observations)، ذات وسط حسابي $\bar{x}$ وإنحراف معياري S_x، فهل يتساوى الوسط الحسابي لهذه العينة، مع الوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي؟ نلاحظ أن قيمة $\bar{x}$ نادراً ما تساوي قيمة μ، بسبب خطأ المعاينة، إلاّ أننا نتوقع أن تكون قيمة $\bar{x}$ قريبة جداً من قيمة μ. ولو أننا أخذنا عينات عشوائية معادة ذات حجم (n) (Repeated random samples size n) من نفس المجتمع الإحصائي ثم أوجدنا الوسط الحسابي لكل عينة، فسنجد أن الوسط الحسابي للأوساط الحسابية للعينات يساوي الوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي (لذلك يقال بأن الوسط الحسابي للعينة هو تقدير غير متحيز لقيمة المعلم في المجتمع الإحصائي)، كما وأن توزيع الأوساط الحسابية للعينات تكون موزعة توزيعاً معتدلاً حول μ، وبإنحراف معياري $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، بحيث أن 95% من الأوساط الحسابية للعينات ستقع ضمن المدى $\mu \mp 1.96\ \sigma_{\bar{x}}$. لذلك فإذا علمنا قيمة $\bar{X}$ من العينة فبإمكاننا القول أن μ للمجتمع الإحصائي ستقع ضمن $\bar{X} \mp 1.96\ \sigma_{\bar{x}}$، علماً أن القيمة 1.96 هي القيمة الحرجة (Critical value) المعروفة بالقيمة الجدولية (Table value)، ويتم الحصول عليها من جداول التوزيع المعتدل (Areas under the standard Normal Curve). الجدير بالذكر أنه إذا قررنا أن μ تقع ضمن المدى $\bar{X} \mp 1.96\ \sigma_{\bar{x}}$ فحينئذٍ نكون واثقين بنسبة 95% من قرارنا الإحصائي، ونكون مخطئين بنسبة 5% في قرارنا الإحصائي. وبالمثل فإن فترة الثقة $\bar{X} \mp 2.58\ \sigma_{\bar{x}}$ تمثل فترة الثقة بنسبة 99%، علماً أنه باستطاعة الباحث توسيع أو تضييق فترة الثقة وذلك بتغيير حجم العينة أو/و تغيير مستوى المعنوية (The level of significance)*.

* يعرف احتمال ارتكاب الباحث للخطأ من النوع الأول (Type I error) بمستوى المعنوية ألفا α.
ويتخذ الباحث عادة المستوى 1% أو 5% والذي يمثل الحد الأقصى الذي يمكن للباحث أن =

آخذين في الإعتبار أنه إذا كان حجم العينة صغيراً (أقل من 30 مشاهدة) فحينئذٍ يتوجب على الباحث استبدال القيم الحرجة 1.96 و 2.58 بقيم أخرى مناسبة يتم الحصول عليها من جدول توزيع استودينت (Student's T-distribution)، بإستخدام مستوى معنوية ودرجات حرية (degree of freedom) مناسبة *.

يهتم الباحث في مجال الإقتصاد القياسي بشكل خاص بإيجاد فترات الثقة لمعاملات الإنحدار b_i، وللقيمة المتوقعة في المجتمع الإحصائي E(Y/X). ولا شك أنه حتى يتمكن من صياغة فترة الثقة لمعامل الإنحدار، لا بدّ له من معرفة الخطأ المعياري لتوزيع المعاينة لمعامل الإنحدار (The standard error of the sampling distribution of b)، علماً أن الخطأ المعياري، لا يعدو عن كونه

يتحمل فيه ارتكاب الخطأ من النوع الأول. فلو استعمل الباحث المستوى 5% فإنه بذلك يكون واثقاً بنسبة 95% من أنه سيتخذ القرار الإحصائي السليم في رفض فرض العدم. والجَدير بالذكر أن الباحث عند اتخاذه للقرار الإحصائي (Statistical decision) فإنه بالضرورة وبطريق غير مباشر يرتكب أحد خطأين معروفين في الإحصاء بالخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني.

* يستخدم توزيع استودينت (Student's T-distribution) على متغير عشوائي يتوزع توزيعاً معتدلاً، ويكون الوسط الحسابي في المجتمع غير معلوم (أو يفترض أنه معلوم)، كما وأن التباين يقدر من العينة. ويتميز توزيع استودينت -T على التوزيع المعتدل (Normal distribition) في أن الأخير هو توزيع فريد (Single distribution)، بينما نجد أن توزيع استودينت -T هو عائلة من التوزيعات (Family of distributions)، يعتمد كل منها على درجات الحرية المناسبة. أما درجات الحرية (degree of freedom) فيقصد بها عدد الحدود (Terms) التي يمكن أن تتحرك بحرية في مجموعة من البيانات. فلو فرضنا أن مجموع خمسة أرقام هو 24، وأن أربعة أرقام من أصل الخمسة ممكن أن تكون أي شيء مثل 6، 4، 2 و 10 ومجموعها 22، حينئذٍ يجب أن تكون قيمة الرقم الخامس 2 وذلك حتى يصبح مجموع الأرقام الخمسة 24، وبالتالي يمكننا القول أن أحد الأرقام ليس مستقلاً عن قيم الأخرين بينما الأخرين مستقلين، فنقول في هذا، أننا وضعنا قيداً واحد (one restriction) على البيانات، ففقد لذلك درجة حرية واحدة (one degree of freedom) وتكون درجات الحرية لمثالنا السابق $dF = 5-1 = 4$. وهذا ما يفسر استخدام $n-1$ بدلاً من n في إيجاد التباين للعينة، حيث أن مجموع الإنحرافات عن الوسط الحسابي يساوي صفراً، ففقد درجة حرية واحدة ويكون التباين:

$$S_x^2 = \frac{\Sigma(x-x)^2}{n-1}$$

الإنحراف المعياري لتوزيع المعاينة. ولإيجاد تباين توزيع المعاينة لمعامل الإنحدار b، نلاحظ أن بالإمكان تعريف تباين معامل الإنحدار على أنه:

$$E\,[b - E(b)]^2 = \frac{\Sigma\,(b-\beta)^2}{M}$$

حيث تمثل M عدد العينات. ويلاحظ في المعادلة أعلاه أن كلاً من β و M غير معلومة (unknown) للباحث، كما ويُفترض أن تكون M كبيرة جداً. لذلك يمكن القول أن المعادلة أعلاه صعبة الإيجاد من الناحية العملية ويستعاض عنها بالمعادلة العملية:

$$\sigma_b^2 = \frac{S\,S_{Resd}}{n-k-1} \cdot \frac{1}{\Sigma x^2}$$

حيث تمثل n عدد المشاهدات في العينة، وترمز K إلى عدد المتغيرات المستقلة في معادلة الإنحدار*. وبما أننا حصلنا على تباين توزيع المعاينة لمعامل الإنحدار، فقد أصبح بالإمكان اختبار جوهرية (Significance) معامل الإنحدار من الناحية الإحصائية، وبالإمكان صياغة فترة الثقة لمعامل الإنحدار كالآتي:

$$\beta = b \mp Z_c\,\sigma_b \qquad (1)$$

$$\beta = b \mp t_c\,\sigma_b \qquad (2)$$

---

* لاحظ أن:

$$b = \Sigma\omega Y = \Sigma\omega\,(\alpha+\beta X+u) = \alpha\Sigma\omega + \beta\Sigma\omega X + \Sigma\omega U$$

ونظراً لأن:

$$\Sigma\omega = \frac{\Sigma x}{\Sigma x^2} = 0$$

$$\Sigma\omega X = \Sigma\,\frac{x}{\Sigma x^2}\,.\,X = 1$$

إذن:

$$b = \beta + \Sigma\omega U$$

$$b - \beta = \Sigma\omega U$$

$$E\,[b-\beta]^2 = \Sigma\omega^2\,E(U)^2 = \Sigma\,\left(\frac{x}{\Sigma x^2}\right)^2 . \,\sigma_{xy}^2 = \frac{1}{\Sigma x^2} \cdot \frac{S\,S_{Resd}}{n-k-1}$$

انظر في ذلك: Johnston P: 20

حيث تستعمل الصيغة (1) إذا كان حجم العينة (n) كبيراً (اكثر من 30 مشاهدة)، بينما تستعمل الصيغة (2) في حالة العينات الصغيرة (أقل من 30 مشاهدة). كذلك تجدر الإشارة إلى أنه باستطاعة الباحث أيضاً تحديد فترة الثقة للقيمة المتوقعة E(Y/X)، وتحديد فترة الثقة للقيمة الفعلية Y، كالآتي:

$$E(Y/X) = \mu_{xy} = \alpha + \beta X = \bar{Y} + b(X - \bar{X})$$

$$\sigma_{\mu_{xy}}^{2} = \sigma^{2} [\bar{Y} + b\,(X - \bar{X})]$$

$$\sigma_{\mu_{xy}}^{2} = \sigma^{2}\,(\bar{Y}) + (X - \bar{X})^{2}\,\sigma^{2}\,(b)$$

$$\sigma_{\mu_{xy}}^{2} = \frac{\sigma_{yx}^{2}}{n} + (X - \bar{X})^{2}\,\frac{\sigma_{yx}^{2}}{\sum x^{2}}$$

$$\sigma_{\mu_{xy}} = \sigma_{y_x}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X - \bar{X})^{2}}{\sum x^{2}}} = \sigma_{yx}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{x^{2}}{\sum x^{2}}}\,*$$

أما فترة الثقة فيمكن صياغتها كالآتي:

$$\hat{Y} \mp Z_{c}\,\sigma_{\mu_{yx}}$$

اختبار الفروض (Testing hypotheses):

يعتمد الإقتصاد القياسي على البحث العلمي (Scientific research)، ولا شك بأن الخطوة الأولى في البحث العلمي، هي أن يحدد الباحث مشكلة البحث (Problem-Idea). والجدير بالذكر، أنه بعد أن يعرف الباحث ماذا يريد أن يبحث فعلاً، عليه حينئذٍ أن يصيغ فروض بحثه (Formulating Testable hypothese)، فالباحث يلاحظ ظاهرة (phenomenon) ما، ومن

---

* لاحظ أن تباين (Y) يساوي إلى $\frac{\sigma_{y}^{2}}{n}$، كما وأن σ_{y}^{2} يساوي إلى σ_{u}^{2} يساوي σ_{yx}^{2}. كذلك تجدر الإشارة إلى أن فترة الثقة لتقدير قيمة فعلية Y هي:

$\hat{Y} \mp Z_{c}\,\sigma_{yx}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{x^{2}}{\sum x^{2}}}$ انظر: Wonnacott & Wonnacott 28-29

ثم يتوقع مسببات ونتائج لهذه الظاهرة. لذلك يقال أن فروض البحث (Research hypotheses)، هي في الحقيقة توقعات ورهان (Prediction and betting) وعلى الباحث أن يلتزم بقواعد البحث العلمي. فصياغة فروض البحث هي من قواعد البحث العلمي التي تهدف إلى تقليل الأخطاء (errors) في البحث، فلو جمع الباحث البيانات (data) أولاً، ثم حللّها، وبنى عليها نتائجه، دون أن يكون قد بدأ بأسئلة أو فروض بحث محددة (يريد الإجابة عليها)، فحينئذٍ نقول بأن هذا الباحث قد خرج عن قواعد البحث العلمي.

تجدر الإشارة إلى أن الباحث في بداية الأمر يفترض فرضاً عاماً وواسعاً (General) وإذا كان هذا الفرض جيداً، فباستطاعة الباحث حينئذٍ صياغة فروض البحث والتي يجب أن تتوافر فيها المواصفات التالية:

أ ـ يجب أن تصاغ فروض البحث في شكل جمل استفهامية.

ب ـ يجب أن تربط فروض البحث بين متغيرين أو أكثر.

جـ ـ يجب أن تتضمن فروض البحث على مفهوم ضمني مؤداه إمكانية قياس المتغيرات الإقتصادية وبالتالي إمكانية إجراء اختبارات إحصائية على العلاقات قيد البحث.

د ـ يجب أن تكون فروض البحث محددة، فعندما تكون التوقعات محددة يصغر إحتمال الحصول على نتائج أو فروقات جوهرية في البحث عن طريق الصدفة[1].

الجدير بالذكر، أنه يتوجب على الباحث التمييز بين فروض البحث والفروض الإحصائية (Statistical hypotheses). ففروض البحث تكون عامةً، ومبنيّة على نظرية علمية، أو مبنية على نتائج بحوث سابقة، أو مبنية على أسس منطقية. ومثل هذه الفروض كما ذكرنا، تتضمن توقعات لنتائج

(1) Fred N. Kerlinger., «Foundation of Behavioral Research»— 2nd ed., Holt-Rinehart and Winston, Inc., 1973, PP: 16-22.

البحث، ويستدل الباحث منها إلى فروض إحصائية، قابلة للإختبار الإحصائي (Testable hypotheses) .

تصاغ الفروض الإحصائية لتقييم فروض البحث، علماً أن الفروض الإحصائية، هي تعبير عن واحد أو أكثر من معالم المجتمع الإحصائي، التي سحبت منها العينة. وفرض العدم (The null hypothesis: H_0) والفرض البديل (The alternative hypothesis :H_1)، هما شكلان من الفروض الإحصائية. فعلى سبيل المثال، تقترح النظرية الإقتصادية لعرض سلعةٍ ما، وجود علاقة إيجابية بين العرض والثمن، ونظراً لأن النظرية لم تحدد فيها إذا كانت العلاقة خطية (linear) أو غير خطية (Nonlinear)، فإننا سنفترض أن العلاقة خطية وبالتالي يمكننا صياغة معادلة الإنحدار كالآتي: *

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X$$

وتتلخص مشكلة الباحث، في تقدير العلاقة بين العرض والثمن، وفي تقدير قيم المعالم α و β، من خلال معرفتنا بمعاملات الإنحدار b_0 و b_1 التي حصلنا عليها من بيانات العينة. وهنا نلاحظ أن الباحث، وقبل جمع البيانات، يتوقع أن تكون قيمة b_0 موجبة أو صفراً، حيث تعني القيمة الموجبة للثابت b_0 (Intercept) أنه توجد كمية معروضة من السلعة في السوق حتى ولو كان السعر صفراً $X = 0.0$، بمعنى أن الباحث لا يتوقع أن تكون b_0 سالبة. ولو حدث أن حصل الباحث على قيمة سالبة، للثابت b_0، فعليه إهمالها لأنها لا تعني شيئاً بالنسبة له. آخذين في الإعتبار، أنه إذا كانت مشكلة البحث تتضمن لتحديد مرونة (Elasticity) العرض، فحينئذٍ تلعب الإشارة السلبية لمعامل الإنحدار b_0 دوراً هاماً في تحديد المرونة، لأنها عندما تدخل في احتساب المرونة، فإن القيمة السالبة للثابت b_0، تعني أن عرض السلعة مرن. علماً أنه يمكننا

* يقصد بالخطية أعلاه، أن المعادلة خطية في المعالم α و β. بمعنى أن هده المعالم مرفوعة إلى القوة الأولى (α and β are raised to the first power).

احتساب المرونة في تحليل الإنحدار كالآتي:*

$$\text{المرونة} = \frac{\text{التغير النسبي في الكمية}}{\text{التغير النسبي في الثمن}} = \frac{\frac{\Delta Y}{Y}}{\frac{\Delta X}{X}}$$

$$\eta = \frac{\Delta Y}{Y} \cdot \frac{X}{\Delta X}$$

$$\eta = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \frac{X}{Y}$$

وعلى افتراض أن $\bar{X}$ تمثل السعر X في حين $\bar{Y}$ تمثل الكمية المعروضة Y، إذن: **

$$\eta = b_1 \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$$

$$\eta = b_1 \cdot \frac{\bar{X}}{b_0 + b_1\bar{X}}$$

$$\eta = \frac{b_1\bar{X}}{b_0 + b_1\bar{X}}$$

وبناء على الصيغة أعلاه يمكننا القول أنه:

- إذا كانت $b_0 = 0.0$ فحينئذٍ المرونة تساوي الواحد الصحيح، (عرض متكافىء المرونة) حيث تتساوى التغيرات النسبية للعرض والسعر، ويكون العرض بذلك متكافىء المرونة حيث يؤدي تغيير الثمن إلى تغير الكمية المعروضة بنفس النسبة، فلو ارتفع الثمن إلى الضعف فإن الكمية المعروضة ترتفع إلى الضعف.

---

* يقصد بمرونة العرض درجة استجابة العرض للتغير في العامل الذي يؤثر عليه. للتوسع في ذلك انظر: د. اسماعيل محمد هاشم ص ص: 237-236.

** نظراً لأن المرونة تتغير عند كل نقطة في الدالة لذلك نأخذ الأوساط الحسابية $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ بدلاً من X و Y.

- إذا كانت b_0 سالبة فحينئذٍ تكون المرونة أكبر من الواحد الصحيح حيث يزيد التغير النسبي في العرض عن التغير النسبي في السعر فيكون العرض بذلك مرناً (Elastic). ومن الواضح أن المرونة تزداد كلما كانت النتيجة أكثر بعداً عن الواحد الصحيح، بحيث أن تغير طفيف في الثمن يحدث تغيراً كبيراً في الكمية المعروضة.

- إذا كانت b_0 موجبة، فحينئذٍ تكون المرونة أقل من الواحد الصحيح حيث يقل التغير النسبي في العرض عن التغير النسبي في السعر فيكون العرض بذلك قليل المرونة (Inelastic). ومن الواضح أن المرونة تزداد ضعفاً كلما كانت النتيجة أقل بكثير من الواحد الصحيح، حيث لا تتأثر الكمية المعروضة كثيراً بتغيرات الثمن.

أما بالنسبة لميل خط الانحدار b_1 فيتوقع الباحث أن يكون الميل موجباً، لأن خط انحدار العرض على الثمن يكون صاعداً نحو الأعلى، حيث تفترض النظرية الاقتصادية وجود علاقة طردية بين العرض والثمن.

لا شك أنه بعد الحصول على التقديرات b_0 و b_1 يتوجب على الباحث اختبار معنوية (Significance) التقديرات، حيث يصيغ الباحث فرضية العدم، ومؤداها أن البيانات الإحصائية، عن الكمية والسعر، هي عبارة عن عينة عشوائية، مسحوبة من مجتمع إحصائي لا يوجد فيه انحدار للكمية المعروضة على السعر:

$$H_0: \beta = 0$$

علماً أن فرض العدم غالباً ما يكون في الاتجاه المعاكس لفرض البحث، لذلك يهدف الباحث عادة إلى رفض فرض العدم، أو إبطاله، بالاختبار الإحصائي، وأخذ الفرض البديل له:

$$H_1: \beta \neq 0$$

والذي ينص على وجود علاقة بين الكمية المعروضة والسعر في المجتمع الاحصائي. علماً أنه باستطاعة الباحث اختبار معامل التحديد بدلاً من معامل الانحدار*. وتجدر الإشارة أخيراً إلى أن فرض العدم هو تعبير يتضمن واحد أو أكثر من المقاييس الخاضعة لاختبار إحصائي وهو بالتالي الفرض الذي يمكنه رفضه لكن لا يمكن برهنته.

أمثلة تطبيقية:

مثال (١): دالة الاستهلاك في تونس:

تقترح النظرية الاقتصادية، وجود علاقة خطية طردية بين الانفاق الاستهلاكي الخاص (Total personal consumption expenditure) والدخل الشخصي المتاح (Total disposable personal income). ويمكن صياغة ما ورد في النظرية الاقتصادية بالنموذج الآتي:

$$C = b_0 + b_1Y$$

يقوم هذا النموذج على افتراض أن العلاقة طردية وخطية، بين الدخل والاستهلاك. فطرية العلاقة تعني أن زيادة الدخل تؤدي إلى زيادة الاستهلاك، في حين يؤدي نقص الدخل إلى نقص الاستهلاك. أما خطية العلاقة فتعني أنه إذا تغير المتغير المستقل (الدخل) بنسبة معينة، فإن المتغير التابع (الاستهلاك) يتغير بنسبة ثابتة، $b = \frac{\triangle c}{\triangle Y}$. لذلك، فإذا لجأنا إلى الرسم البياني،

* تجدر الإشارة إلى أن استخدام إحصائية F (F-Test) في اختبار معامل التحديد هي أفضل من اختبار معامل الانحدار وخاصة في حالة الانحدار المتعدد حيث يُخشى من وجود النماذج المتكافئة (Equivalent Models) حيث يكون إحدى المتغيرات المستقلة دالة في متغير مستقل اخر (Linear dependency). علماً أن توزيع F (F-distributions) هو التوزيع النظري لنسبة التباين بين مجتمعين وقد وُجد على يد السير فيشر (Fisher) في أوائل العشرينات من القرن الحالي لكن طُور فيما بعد بشكل يُسهل استعماله وسُمي على شرف فيشر.

ومثلنا الدخل المتاح على المحور الأفقي، والانفاق الاستهلاكي الخاص على المحور الرأسي، وربطنا بين أزواج المشاهدات على المتغيرين خلال فترات زمنية متتالية، فإننا نحصل على خط مستقيم[1].

ونظراً لوجود عوامل أخرى غير الدخل المتاح تؤثر في الاستهلاك، لذلك فإننا لا نتوقع في الحياة العملية أن تقع أزواج المشاهدات الفعلية، للمتغيرين C و Y، على خطٍ مستقيم. ويمكننا أن نأخذ في الاعتبار أثر العوامل الأخرى، وذلك بتحويل الصيغة الرياضية التامة أعلاه إلى صيغة عشوائية كالآتي:

$$C = b_0 + b_1Y + U$$

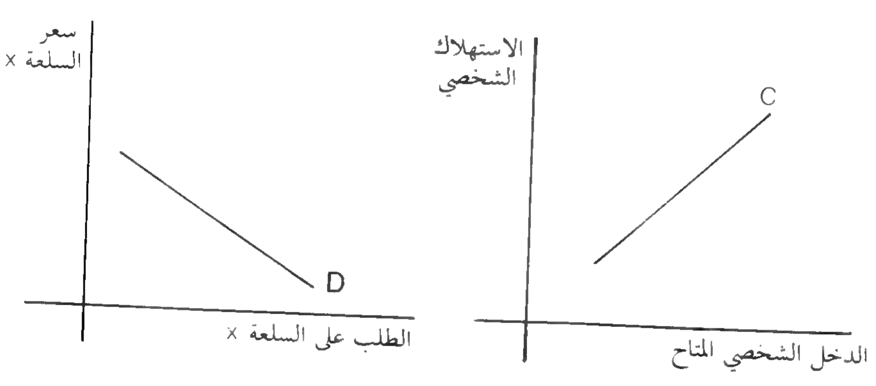
أما فيما يتعلق بمعالم النموذج b_0 و b_1 فيرى الاقتصادي كينز (Keynes) أن الاستهلاك الخاص يتحدد خلال فترة زمنية معينة بقدرة (Ability) الأفراد على الانفاق على سلع وخدمات الاستهلاك من جهة، ورغبتهم (Willingness) في الانفاق على سلع وخدمات الاستهلاك من جهة أخرى. وهنا نلاحظ أنه يُتوقع أن يكون الثابت b_0 موجباً (Positive)، لأن b_0 يمثل الاستهلاك المستقل عن الدخل (Autonomous) والذي يتحدد بعوامل أخرى غير الدخل (Nonincome determinants of consumption)، لذلك فإننا نتوقع أن يكون b_0 موجب حتى ولو كان الدخل صفر، وذلك باعتماد الأفراد على مدخراتهم أو القروض والإعانات. ولقد افترض كينز أن دالة الاستهلاك مستقرة في الفترة القصيرة (افترض ثبات موقع وشكل دالة الاستهلاك) لأن b_0 يتحدد بعوامل غير الدخل الشخصي المتاح، تتمثل بعوامل شخصية (Subjective factors) تعكس عوامل الرغبة (Willingness)، والتفضيل النفسي (Psychological preferences)، مثل الشعور بالكبرياء، الشراهة إلى المال، الرغبة في ترك الثروة، التأثر بالإعلان، توقعات ارتفاع الأسعار

---

(1) Leftwich, Richard H., "An introduction to Economic Thinking". Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969 pp:533 - 537.

وتوقعات توافر السلع في المستقبل..... وبعوامل موضوعية (Objective factors) تؤثر في قدرة الأفراد على الانفاق ومثال ذلك: هيكل توزيع الدخل القومي بين أفراد المجتمع، حجم ما يملكه الأفراد من أصول عينية (فزيادة هذه الأصول تنقل دالة الاستهلاك إلى أعلى)، البيع بالتقسيط (إن البيع بالتقسيط يؤثر في قدرة الأفراد على الشراء كما وأن زيادة إقراض المستهلك ترفع دالة الاستهلاك إلى أعلى)....الخ.

والجدير بالذكر أن تأثير العوامل الموضوعية بدالة الاستهلاك في الاقتصاد الكلي (Macro Economics) يشبه في ذلك تأثير رغبة وقدرة المستهلك على الشراء بدالة الطلب في الاقتصاد الجزئي (Micro Economics)، حيث أن الطلب دالة في السعر كما وأن دالة الطلب تنتقل (Shift) بتغير رغبة وقدرة المستهلك على الشراء:



ففي الاقتصاد الجزئي ينتقل منحنى الطلب إلى اليمين (D shifts to the right) وذلك بزيادة رغبة الأفراد أو زيادة قدرتهم على شراء السلعة x، وينتقل المنحنى إلى اليسار (D shifts to the left) إذا أصبحت السلعة أقل منفعة بالنسبة للأفراد أو إذا انخفضت قدرة الأفراد على الشراء. كذلك الحال بالنسبة لدالة الاستهلاك C والتي تنتقل إلى أعلى (Shifts upward) بزيادة رغبة أو قدرة القطاع الخاص على أنفاق دخلهم الشخصي المتاح، كما أنها تنتقل إلى الأسفل

(Shifts downward) إذا زادت رغبة الأفراد في الادخار، أو انخفضت قدرتهم على الانفاق عند مستويات الدخل المختلفة.

ولقد افترض كينز ثبات العوامل الشخصية والموضوعية التي تحدد الاستهلاك في المدى القصير، وافترض أنه لا توجد عوامل تؤثر في قرارات الأفراد نحو توزيع دخلهم المتاح بين الاستهلاك والإدخار إلا مستويات الدخل. وبالتالي فإن الاستهلاك يتحدد بالدخل المتاح (لاحظ أن تغير الاستهلاك نتيجة تغير الدخل يعني الانتقال على نفس منحنى الاستهلاك مع ثبات شكل وموقع دالة الاستهلاك). وتمثل b_1 الميل الحدي للاستهلاك (Marginal propensity to consume)، وطبقاً لكينز، فإن الميل الحدي للاستهلاك للطبقة الفقيرة أعلى منه للطبقة الغنية، في نفس المجتمع. وبنفس المنطق يمكن القول أن الميل الحدي لاستهلاك الأمة الفقيرة، أعلى من الميل الحدي لاستهلاك الأمة الغنية، فحيث يكون أفراد المجتمع أغنياء تقترب حاجاتهم الأساسية من درجة الاشباع الكامل. لذلك فمن المتوقع مثلاً أن تكون قيمة b_1 في اليمن أو السودان، أعلى من قيمة b_1 في دول الخليج.

ولإيضاح كيفية إيجاد معاملات الانحدار البسيطة، واختبارها إحصائياً، دعنا نستخدم البيانات الموضحة في الجدول رقم (5)، عن الاستهلاك الخاص، والدخل الشخصي المتاح، في دولة تونس للفترة 1976 - 1972:

الجدول رقم (5)

الاستهلاك الشخصي والدخل الشخصي المتاح لدولة تونس (بالمليون دينار)[1]

السنين	الدخل المتاح Y	الاستهلاك الشخصي C	Y^2	C^2	Y.C	$\hat{C}$	$e = C-\hat{C}$	$e^2 = (C-\hat{C})^2$	
1972	791	684	625681	467856	541044	705.16	-21.16	447.66	
1973	848	786	719104	617796	666528	752.14	33.85	1145.53	
1974	1122	965	1258884	931225	1082730	978.07	-13.07	170.73	
1975	1266	1032	1602756	1065024	1306512	1096.79	-64.79	4198.28	
1976	1300	1190	1690000	1416100	1547000	1124.83	65.17	4247.51	
Σ:	**5327**	**4657**	**5896425**	**4498001**	**5143814**	**4657**	**0.0**	**10209.71**	المجموع :
M:	**1065.4**	**931.4**				**931.4**			الوسط الحسابي :

(1) تم الحصول على البيانات عن الاستهلاك والادخار والدخل الشخصي المتاح من المصدر:
United Nations., "National Statistics Accounts". VII. 1980 pp:1953 - 1958.

$$^{*}\ \Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{n} = 5896425 - \frac{(5327)^2}{5} = 221039.2$$

$$\Sigma c^2 = \Sigma C^2 - \frac{(\Sigma C)^2}{n} = 4498001 - \frac{(4657)^2}{5} = 160471.2$$

$$\Sigma c.y = \Sigma C.Y - \frac{(\Sigma C)(\Sigma Y)}{n} = 5143814 - \frac{(4657)(5327)}{5}$$

$$= 182246.2$$

$$r = \frac{\Sigma cy}{\sqrt{\Sigma c^2 . \Sigma y^2}} = \frac{182246.2}{\sqrt{(160471.2)(221039.2)}} = 0.9677$$

$$r^2 = 0.94$$

$$b_1 = \frac{\Sigma cy}{\Sigma y^2} = \frac{182246.2}{221039.2} = 0.8245$$

$$b_0 = \overline{C} - b_1\overline{Y} = 931.4 - (0.8245)\ (1065.4) = 52.98$$

إذن نخلص إلى أن الدالة التقديرية لانحدار الاستهلاك على الدخل المتاح في تونس هي: **

$$\hat{C} = 52.98 + 0.83Y$$

---

* لاحظ أنه بالإمكان تسهيل العمليات الحسابية وذلك بحذف ثابت (Constant) من البيانات.

** لاحظ أنه باستطاعة الباحث الحصول على دالة الادخار (Savings function) من المعلومات الواردة في دالة الاستهلاك دون الحاجة لجمع بيانات عن الادخار والدخل المتاح ذلك لأن:

$$Y = C + S$$

$$S = Y - C = Y - (b_0 + b_1Y) = -b_0 + (1 - b_1)\ Y$$

$$S = -52.98 + 0.17Y$$

علماً أنه ليس باستطاعة الباحث الحصول على معامل التحديد r^2 لدالة الادخار دون العودة إلى البيانات الأصلية، ذلك لأن تباين (Variance) الادخار غير معلوم. وتجدر الإشارة هنا إلى أن الميل الحدي للإدخار هو $1-b_1 = 0.17$. ونظراً لأن قيمة المضاعف (Multiplier) تساوي إلى =

ويمثل الثابت $b_0 = 52.98$ تقاطع (Intercept) منحنى الاستهلاك مع محور الدخل، ويعبر عن الاستهلاك المستقل عن الدخل (Autonomous consumption) والذي يتحدد بعوامل غير الدخل المتاح، ويشير في مثالنا أعلاه إلى قيمة الاستهلاك الشخصي الكلي (بالمليون دينار) عندما يكون الدخل الشخصي المتاح (بالمليون دينار) مساوياً الصفر. علماً أن قيمة $b_0 > 0$ تؤكد ما ورد في النظرية الاقتصادية.

أما ميل (Slope) منحنى الاستهلاك $b_1 = \frac{\triangle C}{\triangle Y} = 0.83$ فيمثل الميل الحدي للاستهلاك (mpc)، ويقيس معدل التغير في الاستهلاك الخاص، نتيجة تغير الدخل المتاح بوحدة قياس واحدة، ونظراً لأن وحدة القياس في المثال أعلاه هي المليون دينار تونسي، لذلك فمن المتوقع زيادة الاستهلاك الخاص بقيمة 830000 دينار، نتيجة زيادة الدخل المتاح بقيمة مليون دينار. علماً أن $1 > b_1 > 0$، تؤكد ما ورد في النظرية الاقتصادية. آخذين في الاعتبار، أن البيانات في مثالنا أعلاه هي بيانات لسلاسل زمنية (Time series data)، علماً أنه لو كانت البيانات أعلاه مأخوذه في نقطة زمنية محددة (Cross-section data)، كأن يجمع الباحث بيانات عن الاستهلاك والدخل المتاح لعددٍ من العائلات، فإن تفسير b_1 في هذه الحالة، يكون عبارة عن الاختلاف المتوقع (The estimated difference) في الاستهلاك الشخصي في المعدّل (on the average) لعائلتين تختلفان في دخلهما المتاح بوحدة قياس

$= \frac{1}{\text{الميل الحدي للادخار}}$ لذلك فإن قيمة المضاعف في المثال أعلاه تساوي $6 \approx \frac{1}{0.17} = K$، بمعنى أن زيادة الدخل بقيمة دينار تزيد الادخار بقيمة 0.17 من الدينار. وبالتالي يجب رفع الدخل المتاح إلى ستة أضعاف إذا أردنا زيادة الادخار بقيمة دينار. علماً أننا لن نتوسع هنا في مناقشة موضوع المضاعف لأن المضاعف لا يعمل في الدول النامية بنفس الطريقة التي يعمل بها في الدول المتقدمة ويرجع ذلك إلى خصائص اقتصاديات الدول النامية وأهمها: انخفاض مرونة الانتاج الكلي، وانعدام مرونة العرض الزراعي الذي يمثل النشاط الرئيسي وانعدام مرونة العرض الكلي لرأس المال.

واحدة، وبالتالي فهي تقيس أيضاً الميل الحدي للاستهلاك (mpc) لأنها تساوي نسبة الاختلاف في الانفاق الاستهلاكي، إلى الاختلاف في الدخل المتاح. فلو كانت $b_1 = \$0.22$ لأمكننا القول، أن الاختلاف المتوقع في الاستهلاك بالمعدّل لعائلتين تختلفان في دخلهما المتاح بقيمة دولار واحد هو 0.22 من الدولار.

أما بالنسبة إلى الميل المتوسط للاستهلاك في مثالنا عن تونس فيساوي إلى:*

$$apc = \frac{\bar{C}}{\bar{Y}} = \frac{931.4}{1065.4} = 0.874$$

أما فيما يتعلق بقياس مدى استجابة الاستهلاك للتغير في الدخل المتاح، فباستطاعتنا الحصول على المرونة الدخلية (The income elasticity of consumption) التي تقيس التغير النسبي (The percentage change) في الاستهلاك الناتج عن تغير نسبي محدد في الدخل المتاح كالآتي:

$$\eta = b_1 . \frac{\bar{Y}}{\bar{C}} = 0.8245 \frac{1065.4}{931.4} = 0.94$$

وتُحتسب المرونة عادةً بقسمة المعامل الحدي على المعامل المتوسط، كالآتي:

$$\eta = \frac{mpc}{apc} = \frac{0.8245}{0.8742} = 0.94$$

* من المعلوم أن الميل المتوسط للاستهلاك يساوي $\frac{\text{الاستهلاك}}{\text{الدخل المتاح}}$، ويتوقع أن يتناقص مع تزايد الدخل، لكن لو أن البيانات لمثالنا أعلاه كانت تتعلق بعدد كبير جداً من السنوات فحينئذٍ نتوقع أن يصل منحنى الاستهلاك نقطة الأصل (The origin) حيث يكون الميل المتوسط للاستهلاك ثابتاً (Constant) لأن الدالة في هذه الحالة تكون تناسبة (Proportional) وأفضل قياس للميل المتوسط للاستهلاك هو $apc = \frac{\bar{C}}{\bar{Y}}$ وتدل على نسبة ما ينفق من الدخل المتاح على الاستهلاك الشخصي. وقد أخذت الأوساط الحسابية $\bar{C}$ و $\bar{Y}$ بدلاً من الكميات الأساسية C و Y لأن المرونة تتغير عند كل نقطة من الدالة. انظر في ذلك Aigner p:55.

الجدير بالذكر، أنه يمكننا إيجاد المرونة في تحليل الانحدار وذلك باستخدام الدالة اللوغارتمية. فلو فرضنا أنه تم تحويل البيانات عن كلٍ من الاستهلاك الشخصي والدخل المتاح في الجدول رقم (5) إلى شكلٍ لوغارتمي (The variables are stated in terms of logarithms) فإننا سنحصل على معادلة الانحدار: *

$$\log \hat{C} = 0.1377 + 0.94 \log Y$$

$$r = 0.97$$

علماً أن قيمة b_1 في هذه المعادلة تقيس المرونة وتساوي قيمة المرونة التي حصلنا عليها بالطرق السابقة، ويمكن تفسيرها في هذه المعادلة على أنها التغير النسبي المتوقع في الاستهلاك نتيجة تغير الدخل المتاح بنسبة 1% (The percentage change in consumption per one percent change in income).

أما فيما يتعلق بمعامل الارتباط $r = 0.97$، فيشير إلى وجود علاقة طردية قوية بين الاستهلاك الشخصي والدخل المتاح، وهذا يؤكد بالطبع ما ورد في

---

* تجدر الإشارة هنا إلى أن النموذج الأساسي $C = b_0 + b_1 Y$ يفترض ثبات الميل الحدي للاستهلاك b_1، أي يفترض ثبات النسبة بين الإنفاق الإستهلاكي والدخل. علماً أن كينز لا يفترض خطية العلاقة، وإنما يفترض أن الميل الحدي للاستهلاك يتناقص مع تزايد الدخل، فإذا كان المجتمع يخصص 93% من دخله للإنفاق الاستهلاكي عندما يكون حجم الدخل القومي 500 مليون دولار، فإنه من المتوقع أن يخصص نسبة أقل عندما يزيد الدخل إلى مليار دولار. ويمكن إظهار هذه الفرضية بإستخدام الدالة نصف اللوغارتمية $C = b_0 + b_1 \log Y$ ذلك لأن القيم التي تتغير بمقادير متزايدة، تتغير لوغارتماتها بمقادير ثابتة. فعلى الرغم من ثبات المعامل b_1، إلاّ أنه يدل على تناقص العلاقة بين التغير النسبي في الإستهلاك والتغير النسبي في الدخل. أما النموذج $\text{Log}\, C = b_0 + b_1 \text{Log}\, Y$ فهي معادلة من الدرجة الأولى على أساس لوغارتمات القيم الخاصة بالإستهلاك ولوغارتمات القيم الخاصة بالدخل. ونظراً لأن قيمة b_1تكون ثابتة بعد إيجادها، لذلك تكون المرونة التي تدل عليها هذه المعادلة مرونة ثابتة.

النظرية الاقتصادية. أما معامل التحديد $r^2 = (0.97)^2 = 94\%$ فيبين أن 94% من التباين (الاختلاف) الكلي في الاستهلاك الشخصي تم تحديده (أو تفسيره) بمعرفتنا بالاختلافات الكلية في الدخل المتاح. ويشير معامل عدم التحديد $1 - r^2 = 0.06$ إلى التباين العشوائي في الاستهلاك الذي لم نتمكن من تحديده عن طريق معرفتنا بالدخل المتاح. وبالعودة إلى الجدول رقم (5) نجد أن مجموع قيمة الخطأ العشوائي $\Sigma e = 0$ كما وأن:

مجموع الإختلافات الكلية في الإستهلاك الشخصي:

$$SS_T = \Sigma c^2 = 160471.2$$

مجموع الإختلافات الكلية المتبقية بدون تفسير (تحديد):

$$SS_{Resd} = \Sigma e^2 = SS_T\ (1-r^2) = 10209.71$$

مجموع الإختلافات الكلية المحددة بالإنحدار:

$$SS_{Reg} = SS_T - SS_{Resd} = SS_T\ (r^2) = 150261.49$$

أما فيما يتعلق بإختبار جوهرية (معنوية) العلاقة بين الإستهلاك الشخصي والدخل الشخصي المتاح، فبإمكاننا استخدام اختبار -T (T-statistic) لاختبار جوهرية معامل الإنحدار، أو استخدام اختبار -F (F-Test) لاختبار جوهرية معامل التحديد. علماً أننا إذا استخدمنا اختبار -T الإحصائي لاختبار جوهرية معامل الإنحدار b_1، فإننا نفترض أن البيانات في الجدول (5) تمثل عينه عشوائية للمجتمع الإحصائي الذي لا نعلم قيمة المعامل β فيه. ونتساءل هل بالإمكان الحصول على المعامل $b_1 = 0.8245$ في عينه عشوائية مسحوبة من مجتمع احصائي تنعدم فيه العلاقة، بين الدخل والإستهلاك، ويكون المعامل $\beta=0$. وللإجابة على هذا السؤال علينا قبل كل شيء الحصول على الخطأ

المعياري لتوزيع المعاينة لمعامل الإنحدار S_b كالآتي:

$$S_b^2 = \frac{SS_{Resd}}{n-k-1} \cdot \frac{1}{\Sigma y^2}$$

علماً أن Σy^2 في هذه المعادلة تمثل مجموع مربع الإنحرافات عن الوسط الحسابي للمتغير المستقل (الدخل المتاح).

$$S_b^2 = \frac{10209.71}{5-1-1} \cdot \frac{1}{221039.2} = 0.0154$$

$$S_b = \sqrt{S_b^2} = \sqrt{0.0154} = 0.124$$

إذن:

فرض العدم: $H_0: \beta_1 = 0$

الفرض البديل: $H_1: \beta_1 \neq 0$

اختبار ـ T:

$$t = \frac{b-\beta}{S_b}$$

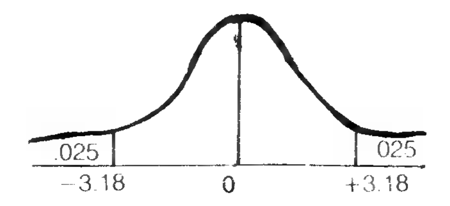
$$t = \frac{0.8245}{0.124} = 6.65$$

قيمة ـ T الجدولية عند مستوى المعنوية 5% ودرجات الحرية 3 هي:

$$t_{(.05,3)} = 3.18$$

نظراً لأن القيمة التي حصلنا عليها لإحصائية t أكبر من القيمة الجدولية، لذلك نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل، ومؤداه أن معامل إنحدار الإستهلاك الشخصي على الدخل الشخصي المتاح في المجتمع الإحصائي يختلف جوهرياً من الناحية الإحصائية عن الصفر، وبالتالي فبإستطاعتنا الإعتماد على الدخل المتاح في التنبؤ بقيم الإستهلاك الشخصي المتوقع[1].

(١) تجدر الإشارة إلى أن فرض العدم هو الفرض الذي يمكنه رفضه ولا يمكن برهنته كما وأن قبول فرض العدم يوقع الباحث في ارتكاب الخطأ من النوع الثاني (Type I I error) في إتخاذ القرار =



والجدير بالذكر أنه بدلاً من استخدام اختبار -T فباستطاعة الباحث الوصول إلى نفس النتيجة وذلك باستخدام اختبار -F لاختبار جوهرية معامل التحديد كما يلي :

فرض العدم : H_0 — وينص على أن إنحدار الاستهلاك الشخصي على الدخل الشخصي المتاح، غير جوهري من الناحية الإحصائية.

الفرض البديل : H_1 — وينص على أن إنحدار الإستهلاك الشخصي على الدخل الشخصي المتاح، جوهري من الناحية الإحصائية.

اختبار -F الإحصائي :

$$F = \frac{R^2 \div K}{(1-R^2) \div (n-K-1)}$$

$$F = \frac{(0.9677)^2 \div 1}{[1-(0.9677)^2] \div (5-1-1)} = 44.15$$

أو بإستخدام الإختلافات المفسرة والإختلافات غير المفسرة بدلاً من معامل التحديد، كالآتي:

$$F = \frac{S\,S_{Reg} \div K}{S\,S_{Resd} \div (n-k-1)}$$

$$F = \frac{(150261.49) \div 1}{(10209.71) \div (5-1-1)} = 44.15$$

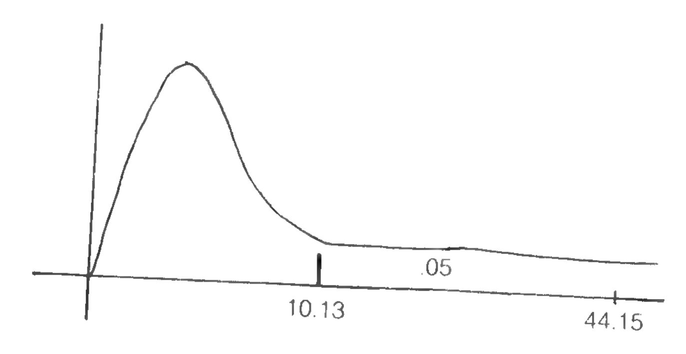
الإحصائي لذلك فلو اضطر الباحث لقبول فرض العدم فمن الأفضل القول (Fail to reject) بدلاً من (Accept) للتوسع انظر:

McNemar, Quinn., «Psychological Statistics». John wiley and sons., Inc., 1969, PP: 65-73.

أما قيمة -F الجدولية، عند درجات الحرية ($d F_1 = 1$ و $dF_2 = 3$) ومستوى المعنوية 5%، فهي:

$$F_{(.05,\ 1,\ 3)} = 10.13$$

وبمقارنة قيمة F التي حصلنا عليها بالقيمة الجدولية، ونظراً لأن القيمة التي حصلنا عليها، أكبر من القيمة الجدولية، لذلك نرفض فرض العدم، ونأخذ الفرض البديل، والذي ينص على أن العلاقة بين الإستهلاك الشخصي والدخل المتاح هي علاقة جوهرية من الناحية الإحصائية.



وتجدر الإشارة هنا، إلى أنه في حالة الإنحدار البسيط لمتغير تابع على متغير مستقل واحد فإن:

$$t = \sqrt{F}$$

ولمثالنا أعلاه نلاحظ أن:

$$t = \sqrt{44.15} = 6.65$$

$$t = \sqrt{10.13} = 3.18$$

أما فيما يتعلق بفترات الثقة فباستطاعة الباحث أن ينشىء فترات ثقة لكلٍ من

معامل الإنحدار، وللقيمة المتوقعة في المجتمع الإحصائي، أو لأية قيمة فعلية للمتغير التابع. علماً أن فترة الثقة لمعامل الإنحدار b_1 هي*:

$$\beta_1 = b_1 \mp t_{(.05,3)} S_b$$

وباستطاعتنا في مثالنا أعلاه عن إنحدار الإستهلاك على الدخل أن نوجد أيضاً فترة الثقة للمعامل الحدي للإدخار $(1-b_1) = b^*$، ذلك لأن:

$$Y = C + S$$

لذلك فإن قيم e للإدخار سوف تساوي قيم e للإستهلاك لكن مع تغيير الإشارة الجبرية، كما وأن مجموع مربع الإنحرافات Σe^2 له نفس القيمة في الحالتين. علماً أن الخطأ المعياري للمعامل b_1 يساوي إلى الخطأ المعياري للمعامل $(1-b_1)$، إذن:[1]

$$\beta = b^* \mp t_{(.05,3)} S_b$$

إذن فترة الثقة للميل الحدي للإدخار هي:

$$\beta = 0.17 \mp (3.18)\ (0.124)$$

$$-0.2243 < \beta < 0.5643$$

ويمكن تفسير فترة الثقة أعلاه على أنه إذا سحبنا 100 عينه عشوائية كلٍ منها ذات حجم 5، وأنشأنا 100 فترة ثقة لمعامل الإنحدار $b^* \mp t S_b$ فإننا نتوقع أن تتضمن 95% من هذه الفترات على القيمة الحقيقية للميل الحدي للإدخار في

---

* تجدر الإشارة إلى أن حجم العينة في مثالنا أعلاه عن دولة تونس صغير جداً 5، وبالتالي فدرجات الحرية قليلة $dF = 5-1-1 = 3$. لذلك يُفضل عدم إنشاء فترات ثقة لأن النتائج ستكون غير دقيقة بسبب عدم دقة S_b نتيجة لصغر حجم العينة. انظر في ذلك الخصائص الإحصائية لتقديرات المربعات الصغرى. ص: ٥٠.

(1) انظر Aigner, PP: 159-160 .

المجتمع الإحصائي، علماً أن فترة الثقة أعلاه هي واحدة من 100 فترة ثقة كان من الممكن تكوينها لمعامل الإنحدار. أما فيما يتعلق بفترات الثقة لقيمة فعلية، أو للقيمة المتوقعة في المعدل للإستهلاك الشخصي عند دخل متاح محدد مثل 1000 مليون دينار مثلاً، فيمكن إنشائها كما يلي:

$$\hat{C} = b_0 + b_1 Y$$

$$\hat{C} = 52.98 + (0.8245)(1000) = 877.48$$

إذن:

فترة الثقة للقيمة المتوقعة $\mu_{cy} = E(C/Y)$ عند الدخل المتاح 1000 هي:

$$\mu_{cy} = \hat{C} \mp t_{(.05,3)} \sqrt{[\frac{1}{n} + \frac{(Y_d - \bar{Y}_d)^2}{\Sigma y_d^2}] \frac{S\,S_{Resd}}{n-k-1}}$$

$$\mu_{cy} = 877.48 \mp (3.18) \sqrt{[\frac{1}{5} + \frac{(1000-1065.4)^2}{221039.7}] \frac{10209.71}{3}}$$

$$790.60 < \mu_{cy} < 964.36$$

بمعنى أننا لو سحبنا 100 عينة عشوائية كل منها ذات حجم 5، وأنشأنا 100 فترة ثقة للقيمة المتوقعة للاستهلاك في المجتمع الإحصائي، عند الدخل المتاح وقدره 1000 مليون دينار تونسي، فإن 95% من هذه الفترات سوف تتضمن على القيمة الحقيقية للقيمة المتوقعة للاستهلاك في هذا المجتمع الإحصائي. علماً أن فترة الثقة أعلاه هي واحدة من أصل 100 فترة ثقة كان من الممكن إنشائها.

أما إذا أردنا إنشاء فترة الثقة لقيمة فعلية للاستهلاك الخاص عند الدخل المتاح والمحددة بالقيمة 1000 مليون دينار في مثالنا، فإن الفترة المطلوبة هي:

$$C = 877.48 \mp 3.18 \sqrt{\left[1 + \frac{1}{5} + \frac{(1000 - 1065.4)^2}{221039.2}\right] \frac{10209.71}{3}}$$

$$1082 > C > 673$$

بمعنى أننا لو سحبنا 100 عينة عشوائية كل منها ذات الحجم 5، فإن 95% من هذه الفترات سوف تتضمن الاستهلاك الحقيقي. علماً أن الفترة أعلاه هي واحدة من أصل 100 فترة ثقة كان من الممكن إنشاؤها.

وتجدر الملاحظة هنا إلى أن فترة الثقة للقيمة المتوقعة μ_{cy} تكون أصغر (أضيق) من فترة الثقة للقيمة الفعلية C، لأن تباين توزيع المعاينة للأوساط الحسابية يكون أصغر من تباين المتغير في المجتمع الاحصائي. علماً أنه من الأفضل استخدام حجم عينة أكبر من المستخدم في مثالنا أعلاه وذلك للحصول على نتائج دقيقة وأفضل وقد تم الاكتفاء بحجم 5 للتبسيط في العمليات الحسابية في هذا الفصل.

مثال (2): انتقال أثر التضخم العالمي إلى الاقتصاد الكويتي:

تعتبر مشكلة استفحال التضخم (Inflation) من الأمور المثيرة للاهتمام والقلق في العالم. وتشير البيانات المتاحة عن الدول العربية إلى اتجاه تصاعدي في معدلات التضخم مقاسة بالأرقام القياسية لأسعار المستهلك*. ويعود السبب في ذلك إلى عوامل خارجية تعكس التضخم المنقول من الدول المتقدمة، وإلى عوامل داخلية تعكس الاختلال في الظروف الخاصة بالبلد. أما العوامل الخارجية، فتتمثل في ارتفاع أسعار واردات الدول العربية من الدول المتقدمة نتيجة لانفتاح الاقتصاديات العربية على الاقتصاديات الخارجية، وبالتالي معاناة الدول العربية من موجات التضخم العالمي، ومن تقلبات معدلات تبادل العملات العربية بالدولار. أما العوامل الداخلية فيمكن

---

* تجدر الإشارة إلى أن الأرقام القياسية، في كثير من الدول العربية، يشوبها الكثير من العيوب. فالكميات المستخدمة في الترجيح (Weights) في معظم الأرقام القياسية، لأسعار المستهلك، بقيت ثابتة، دون أن تعنى بتغيرات أنماط الاستهلاك. أضف إلى ذلك أن بعض الدول العربية تتبع سياسات الدعم للحد من ارتفاع معدلات التضخم، كما وأنها تلجأ إلى رفع الضرائب غير المباشرة للحد من استهلاك بعض أنواع السلع و.... الخ، كل ذلك يجعل الرقم القياسي لا يعكس الزيادة الفعلية في الأسعار المحلية.

حصرها، بالآثار الناتجة عن سياسة الانفاق العام، تزايد الاستهلاك الخاص، زيادة تكاليف النقل والشحن والتأمين على السلع، تزايد أسعار العقارات، ولجوء بعض الدول العربية إلى الإئتمان المصرفي في سد العجز في موازناتها.

ونظراً لأهمية موضوع انتقال أثر التضخم العالمي إلى اقتصاديات الدول العربية من خلال ارتفاع أسعار الواردات، لذلك تم جمع البيانات الموضحة في الجدول رقم (6)، عن الأرقام القياسية لأسعار المستهلك (Consumer price index numbers)، والأرقام القياسية للواردات (Index numbers of imports) في دولة الكويت للفترة 1977 - 1972:

الجدول رقم (6)

الأرقام القياسية لأسعار المستهلك والأرقام القياسية للواردات في دولة الكويت (سنة الأساس 1975)

الرقم القياسي** لأسعار الواردات X	الرقم القياسي* لأسعار المستهلك Y	السنين
72.5	74.8	1972
74.5	81.1	1973
88.8	91.8	1974
100.0	100.0	1975
101.4	105.5	1976
111.7	114.2	1977

* International Monetary Fund, International Financial Statistics. April 1979, P:228.

** اللجنة الاقتصادية لغربي آسيا، «المؤشرات الإحصائية للعالم العربي» للفترة (1978 - 1970) 1980 ص : 136.

سنتناول في الصفحات التالية ثلاثة طرق للحصول على معاملات الانحدار ومعامل الارتباط وهي:

1 - طريقة الوحدات الخام.

2 - طريقة الوحدات المعيارية.

3 - طريقة المصفوفات.

أولاً: استخدام الوحدات الخام في الحصول على معاملات الإنحدار البسيطة ومعامل الإرتباط البسيط:

يبين الجدول رقم (7) العمليات الحسابية اللازمة للحصول على معامل الإنحدار ومعامل الإرتباط بالوحدات الخام.

الجدول رقم (7)

الأرقام القياسية لأسعار المستهلك والأرقام القياسية للواردات في دولة الكويت، للفترة (1972-1977)، سنة الاساس 1975

X	Y	X^2	Y^2	XY	$\hat{Y} = b_0 + b_1X$
72.5	74.8	5256.25	5595.04	5423.00	76.70
74.5	81.1	5550.25	6577.21	6041.95	78.58
88.8	91.8	7885.44	8427.24	8151.84	92.04
100.0	100.0	10000.00	10000.00	10000.00	102.58
101.4	105.5	10281.96	11130.25	10697.7	103.90
111.7	114.2	12476.89	13041.64	12756.14	113.60
Σ:548.9	567.4	51450.79	54771.35	53079.63	567.4
M:91.483	94.567				94.567

$$\Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{n} = 54771.35 - \frac{(567.4)^2}{6} = 1114.22$$

$$\Sigma x^2 = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n} = 51450.79 - \frac{(548.9)^2}{6} = 1235.59$$

$$\Sigma xy = \Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{n} = 53079.63 - \frac{(548.9)\ (567.4)}{6}$$

$$= 1171.987$$

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 . \Sigma y^2}} = \frac{1171.987}{\sqrt{(1114.22)\ (1235.59)}} = 0.99885 \approx 1.0$$

$$b_1 = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{1171.987}{1235.59} = 0.949$$

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 = 94.567 - (0.949)\ (91.483) \approx 8.0$$

إذن نخلص من الجدول رقم (7) إلى أن:

$$\hat{Y} = 8 + 0.949\ X$$

$$r = 0.999 \approx 1.0$$

$$r^2 = 0.998$$

فالعلاقة بين الرقم القياسي لأسعار المستهلك، والرقم القياسي للواردات، في الكويت، هي علاقة طردية قوية جداً وقريبة من العلاقة التامة (Perfect positive correlation) بمعنى أن المشاهدات (Observations) على المتغيرين تقع على خط مستقيم مما يساعد في التنبؤ التام (Perfect prediction)، لقيم الرقم القياسي لأسعار الستهلك، من خلال معرفتنا بقيم الرقم القياسي لأسعار الواردات. علماً أن معامل الإنحدار $b_1 = 0.95$، يشير إلى أنه لو تغير الرقم القياسي لأسعار الواردات بنسبة 10%، فإن التغير المتوقع في الرقم القياسي لأسعار المستهلك سيكون بنسبة 9.5%.

وتجدر الإشارة أخيراً إلى أنه ربما كان النموذج أعلاه يعاني من مشاكل هامة في الإقتصاد القياسي، فمن المعلوم أن الأدبيات الإقتصادية تقترح أن مستوى الواردات (level of imports)، يتزايد مع تزايد الناتج القومي الإجمالي (GNP)، ومع تزايد الأسعار المحلية (Domestic prices). لذلك فقد يكون من الأفضل استخدام النموذج التالي: $\hat{Y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ حيث تمثل Y قيم الواردات، وتمثل X_1 الرقم القياسي لأسعار المستهلك، بينما تمثل X_2 قيم الناتج المحلي الإجمالي، خلال فترة زمنية معينة. لكن نلاحظ أن النموذج الأخير قد يعطي معامل ارتباط متعدد قوي وقريب من الواحد الصحيح، في حين يعطي في نفس الوقت قيم غير جوهرية من الناحية الإحصائية للتقديرات b_1 و b_2، بسبب وجود الإرتباط القوي بين المتغيرات المستقلة X_1 و X_2 (Multicollinearity). وقد يضطر الباحث حينئذٍ أن يحذف أحد المتغيرين المستقلين، من النموذج، فيصبح النموذج كالآتي: $\hat{Y} = b_0 + b_1 x_1$ أو $\hat{Y} = c_0 + c_1X_1$ حيث يقيس النموذج الأول. العلاقة بين الواردات والرقم القياسي لأسعار المستهلك، بينما يقيس النموذج الثاني، العلاقة بين الواردات والناتج القومي الاجمالي. لكن نظراً لأن Y تتحدد بكلٍ من X_1 و X_2 فإن حذف إحدى المتغيرين المستقلين، من النموذج، سيؤدي إلى وجود ما يعرف بالإرتباط المتسلسل التلقائي (Autocorrelation) والناتج عن الخطأ في تحديد النموذج (Specification error). أي سيؤدي إلى وجود علاقة بين المتغيرات العشوائية U_t و U_{t-1}، فينتج عن ذلك، أن التقدير b سيكون غير متحيز (Unbiased estimate)، وتساوي قيمته في المعدل قيمة معامل الإنحدار β في المجتمع الإحصائي، لكن تباين التقدير (The variance of b) سيكون متحيزاً نحو الأسفل (Downward biased). ونتيجة لذلك فقد يحدث وأن نرفض فرض العدم $H_0: \beta=0$، عندما تكون هذه الفرضية صحيحة، فنرتكب بذلك ما يعرف بالخطأ من النوع الأول، في إتخاذ القرار الإحصائي، أو قد يحدث، وأن نقبل فرض العدم $H_0: \beta=0$، عندما يكون المتغير المستقل في

الحقيقــة، جـوهري من الناحية الإحصائية، فنرتكب بذلك ما يُعرف بالخطأ من النوع الثاني في إتخاذ القرار الإحصائي. لذلك يتوجب على الباحث عند استخدام بيانات زمنية (Time series data) أن يجري اختبار دوربون - وتسون (Durbin-waston test) لاختبار العلاقة بين قيم المتغير العشوائي، وسيتم شرح ذلك بالتفصيل في فصول قادمة.

ثانياً: استخدام الوحدات المعيارية في الحصول على معاملات الإنحدار البسيطة ومعامل الإرتباط البسيط:

ذكرنا سابقاً أن الوحدات المعيارية (Standard Scores) هي وحدات مقاسة بالإنحراف المعياري، ولإيضاح كيفية استخدام المتغيرات المقاسة بالوحدات المعيارية سنأخذ المثال السابق عن علاقة الرقم القياسي لأسعار المستهلك بالرقم القياسي للواردات في الكويت كما هو مبين في الجدول رقم (8):

الجدول رقم (8)

الأرقام القياسية لأسعار المستهلك والأرقام القياسية للواردات في الكويت.

X	Y	$Z_x = \frac{X-\bar{X}}{S_x}$	$Z_y = \frac{Y-\bar{Y}}{S_y}$	Z_x^2	Z_xZ_y
72.5	74.8	−1.20757	−1.32398	1.4583	1.598799
74.5	81.1	−1.08034	−0.90201	1.1671	0.974477
88.8	91.8	−0.170674	−0.18533	0.02913	0.031631
100.0	100.0	0.541794	0.363898	0.29354	0.197158
101.4	105.5	0.630852	0.732284	0.39798	0.461963
111.7	114.2	1.286069	1.315003	1.65397	1.691185
Σ:548.9 M:91.483	567.4 94.567	$\Sigma Z_x=0$	$\Sigma Z_y=0$	$\Sigma Z_x^2=$ n−1=5	$\Sigma Z_xZ_y=$ 4.955213

$$\Sigma x^2 = 1235.59$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1235.59}{5}} = 15.72$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1114.22}{5}} = 14.93$$

$$r = \frac{\Sigma Z_x Z_y}{n-1} = \frac{4.955213}{5} = 0.99$$

$$\beta = \frac{\Sigma Z_x Z_y}{\Sigma Z_x^2} = \frac{4.955213}{5} = 0.99$$

$$Z_{\hat{y}} = \beta Z_x \qquad\qquad Z_{\hat{y}} = 0.99\ Z_x$$

نلاحظ أننا حصلنا في الجدول رقم (8) على قيمة معامل الإرتباط ذاته التي كنّا قد حصلنا عليها في الجدول رقم (7). وتجدر الإشارة إلى أنه يمكننا ببساطة الإنتقال من الوحدات المعيارية إلى الوحدات الخام كالآتي:

$$b_1 = \beta \frac{S_y}{S_x}$$

$$b_1 = 0.99 \frac{14.93}{15.72} = 0.94$$

وهي ذات القيمة التي كنّا قد حصلنا عليها بإستخدام الوحدات الخام. علماً أن قيمة الثابت بإستخدام الوحدات المعيارية يساوي صفراً، لكن بإستخدام الوحدات الخام يساوي: $b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X}$

ثالثاً: استخدام المصفوفات (Matrices) لإيجاد معامل الإنحدار البسيط ومعامل الإرتباط البسيط:

يمكننا استخدام المصفوفات، لحل المثال السابق عن علاقة الرقم القياسي

لأسعار المستهلك، بالرقم القياسي للواردات، حيث نضيف المتغير الوهمي X_0 (dummy variable)، كي نتمكن من أخذ الثابت b_0 في الإعتبار، فتصبح بيانات المثال السابق كالآتي:*

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 72.5 \\ 1 & 74.5 \\ 1 & 88.8 \\ 1 & 100.0 \\ 1 & 101.4 \\ 1 & 111.7 \end{bmatrix} \quad (X_0, X_1) \qquad Y = \begin{bmatrix} 74.8 \\ 81.1 \\ 91.8 \\ 100.0 \\ 105.5 \\ 114.2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

ويتم الحصول على معاملات الانحدار بالوحدات الخام باستخدام المعادلة الآتية:

$$b = (X'\ X)^{-1}\ X'Y$$

وذلك باتباع الخطوات الآتية:

(أ) إيجاد قيمة المصفوفة $(X'X)$:

$$\overset{X'}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 72.5 & 74.5 & 88.8 & 100.0 & 101.4 & 111.7 \end{bmatrix}} \overset{X}{\begin{bmatrix} 1 & 72.5 \\ 1 & 74.5 \\ 1 & 88.8 \\ 1 & 100.0 \\ 1 & 101.4 \\ 1 & 111.7 \end{bmatrix}} =$$

$$\overset{X'X}{\begin{bmatrix} 6 & 548.9 \\ 548.9 & 51450.79 \end{bmatrix}}$$

* سيتم إستعمال المصفوفة التي تحتوي على معاملات الإرتباط بين المتغيرات في الفصول المقبلة، =

ولو قارنا النتائج الموضحة أعلاه بنتائج الجدول رقم (7) لوجدنا بأن:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} N & \Sigma X \\ \Sigma X & \Sigma X^2 \end{bmatrix}$$

(ب) إيجاد مقلوب المصفوفه $(X'X)$ أي إيجاد قيمة $(X'X)^{-1}$:

1- إيجاد قيمة المحدد $\triangle$ للمصفوفة $(X'X)$:

$$\triangle = (6)\ (51450.79) - (548.9)\ (548.9) = 7413.53$$

أي أن المحدد يساوي:

$$\triangle = N\ \Sigma\ x_2$$

2 ـ إيجاد مقلوب المصفوفه $(X'X)$ كالآتي:

$$(X'X)^{-1} = \frac{Adj\ (X'X)}{\triangle}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{51450.79}{7413.53} & -\frac{548.9}{7413.53} \\ -\frac{548.9}{7413.53} & \frac{6}{7413.53} \end{bmatrix} =$$

$$(X'X)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 6.94 & -0.07404 \\ -0.07404 & 0.00081 \end{bmatrix}$$

= فهي أفضل الطرق المستخدمة في تحليل الإنحدار المتعدد، أما الطريقة الموضحة أعلاه فهي جيدة وسهلة لكننا لن نستعملها كثيراً في هذا الكتاب ويمكن التوسع في القراءة عن الطريقة الموضحة أعلاه بالعودة إلى:

Drapper, N., and Smith, H. «Applied Regression Analysis». John wiley & Sons, Inc., 1966, ch 2.

(ح) إيجاد قيمة الموجه $X'Y$:

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 72.5 & 74.5 & 88.5 & 100.0 & 101.4 & 111.7 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 74.8 \\ 81.1 \\ 91.8 \\ 100.0 \\ 105.5 \\ 114.2 \end{bmatrix} =$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 567.4 \\ 53079.63 \end{bmatrix}$$

بمقارنة النتيجة أعلاه بنتائج الجدول رقم (7) نخلص إلى أن:

$$(X'Y) = \begin{bmatrix} \Sigma Y \\ \Sigma XY \end{bmatrix}$$

(د) إيجاد معاملات الانحدار بالوحدات الخام:

$$b = (X'X)^{-1}\ (X'Y)$$

إذن:

$$\underset{(X'X)^{-1}}{\begin{bmatrix} 6.94 & -0.07404 \\ -0.07404 & 0.00081 \end{bmatrix}} * \underset{(X'Y)}{\begin{bmatrix} 567.4 \\ 53079.63 \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} 8.00 \\ 0.95 \end{bmatrix}}$$

إذن :

$$b_0 = 8$$

$$b_1 = 0.95$$

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X$$

$$\hat{Y} = 8 + 0.95X$$

$$r = \beta = b \frac{S_x}{S_y} = 0.95 \frac{15.72}{14.93} \approx 1.0$$

وهي نفس القيم التي كنا قد حصلنا عليها في الجدول رقم (7) مع فروقات بسيطة جداً بسبب أخطاء التقريب (Rounding errors).

الفصل الثالث
الإنحدار الخطي المتعدد

تمهيد:

لقد تم في الفصل الثاني مناقشة الانحدار الخطي البسيط لمتغير تابع على متغير مستقل واحد. وبما أن واقع الحياة الإقتصادية، يقوم بشكل عام على تأثر أية ظاهرة، بأكثر من متغير مستقل، لذلك لا بد من توسيع الأسلوب الذي مرَّ معنا في الفصل السابق ليشتمل على انحدار المتغير التابع على العديد من المتغيرات المستقلة. علماً أن توافر الآلات الحاسبة الالكترونية، هو الذي مكن الباحثين من اجتياز صعوبة العمليات الحسابية في تحليل الانحدار المتعدد ومعالجة النماذج الاقتصادية التي تتضمن العديد من المعادلات والعديد من المتغيرات في آنٍ واحد (Simultaneous equations models). سنكتفي في هذا الفصل بمناقشة الانحدار الخطي المتعدد (Multiple linear regression)، في حين نناقش موضوع تحليل المتغيرات المتعددة (Multivariate Analysis) للنماذج الآنية (Simultaneous models) في فصول قادمة. علماً أن تحليل الانحدار المتعدد هو التحليل الذي يُستخدم في اختبار الفروض حول العلاقة بين متغير تابع وبين متغير أو أكثر من المتغيرات المستقلة.

معاملات الانحدار الجزئية:

تُعرف معاملات الإنحدار، في تحليل الانحدار المتعدد، باسم معاملات

الانحدار الجزئية (Partial regression coefficients)، وذلك تمييزاً لها عن معامل الإنحدار البسيط الذي مرّ معنا في الفصل السابق. لقد سبق وذكرنا أن معامل الانحدار البسيط b_1 في تحليل الإنحدار الخطي البسيط، يقيس معدل التغير المتوقع في المتغير التابع Y نتيجة تغير المتغير المستقل X_1 بوحدة قياس واحدة. أما معامل الإنحدار الجزئي b_i في تحليل الانحدار المتعدد، فيقيس معدل التغير المتوقع في المتغير التابع Y، نتيجة تغير المتغير المستقل X_i بوحدة قياس واحدة، مع بقاء أثر بقية المتغيرات المستقلة الأخرى ثابتاً (Holding the effect of other independent variables constant). وتُكتب المعادلة الحقيقية لانحدار المتغير Y على المتغيرين X_1 و X_2 كالآتي:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + U$$

بينما تكتب المعادلة الحقيقية لانحدار Y على K من المتغيرات المستقلة كالآتي:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots\ldots \beta_k X_k + U$$

وسيتم التركيز في هذا الفصل على انحدار Y على متغيرين مستقلين X_1 و X_2. علماً أنه يمكننا استعمال ذات الأسلوب المستخدم في تحليل انحدار Y على متغيرين، في تحليل انحدار Y على K من المتغيرات المستقلة. وتجدر الإشارة هنا إلى أن الفروض الخاصة بالخطأ العشوائي (Assumptions underlying the error term)، والتي مرت معنا في الفصل السابق، تنطبق تماماً على حالة الإنحدار المتعدد، مع التركيز طبعاً على الفرضية التي لم تُستخدم في الانحدار البسيط، والتي تنص على انعدام وجود العلاقة التامة (القوية) بين المتغيرات المستقلة، (There is no perfect relationship beween the X variables)، وهي ما تُعرف بالاقتصاد القياسي بالـ (Multicollinearity). علماً

أنه يمكننا الحصول على معاملات الانحدار الجزئية في تحليل الانحدار المتعدد بطرقٍ مختلفة، تعطي في النهاية نفس النتيجة، وأهم هذه الطرق:

أولاً: الحصول على معاملات الانحدار الجزئية باستخدام المعادلات الطبيعية لمستوى انحدار المربعات الصغرى.

ثانياً: الحصول على معاملات الانحدار الجزئية باستخدام المصفوفات للوحدات الخام.

ثالثاً: الحصول على معاملات الانحدار الجزئية باستخدام مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات.

رابعاً: الحصول على معاملات الإنحدار الجزئية باستخدام البواقي.

إذن: سنتناول كلٍ من هذه الطرق بالتفصيل:

أولاً: الحصول على معاملات الانحدار الجزئية باستخدام المعادلات الطبيعية:

يمكن صياغة المعادلة التقديرية لانحدار المتغير التابع Y، على المتغيرين المستقلين X_1 و X_2، كالآتي:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + e$$

وتتلخص المشكلة، في الحصول على معاملات الانحدار الجزئية b_1، b_2 و b_0، والتي تجعل مجموع مربع البواقي $\Sigma e^2 = \Sigma (Y-\hat{Y})^2$ عند نهايتها الصغرى. علماً أنه لتبسيط العمليات الحسابية، فباستطاعتنا استخدام المتغيرات في شكل انحرافات عن الأوساط الحسابية فتصبح المعادلة التقديرية للانحدار كالآتي:

$$\hat{y} = b_1x_1 + b_2x_2 \quad (1)$$

وللحصول على المعادلات الطبيعية (Normal equations)، بطريقة

سهلة، ودون استعمال التفاضل الجزئي (Partial derivatives)، فإننا نضرب (Multiply) طرفي المعادلة (1)، بالمتغير x_1 ، ونجمع طرفي المعادلة فنحصل على:

$$\Sigma x_1 y = b_1 \Sigma x_1^2 + b_2 \Sigma x_1 x_2 \qquad (2)$$

ثم نضرب طرفي المعادلة (1)، بالمتغير x_2، ونجمع طرفي المعادلة فنحصل على:

$$\Sigma x_2 y = b_1 \Sigma x_1 x_2 + b_2 \Sigma x_2^2 \qquad (3)$$

وباستخدام طريقة كرايمر يتم الحصول على b_1 و b_2، من المعادلتين (2) و (3) كالآتي*:

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma x_1 y & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_2 y & \Sigma x_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2^2 \end{vmatrix}} = \frac{(\Sigma x_1 y)\ (\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_2 y)\ (\Sigma x_1 x_2)}{(\Sigma x_1^2)\ (\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 y \\ \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2 y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2^2 \end{vmatrix}} = \frac{(\Sigma x_2 y)\ (\Sigma x_1^2) - (\Sigma x_1 y)\ (\Sigma x_1 x_2)}{(\Sigma x_1^2)\ (\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

---

* لاحظ أنه يتم الحصول على المعادلات الطبيعية عادة باستخدام التفاضل الجزئي (Partial derivatives) بالنسبة للمعامل b_1 و b_2، وجعل المفاضلة الجزئية مساوية للصفر كالآتي:

$$\Sigma e^2 = \Sigma (y - b_1 x_1 - b_2 x_2)^2$$

$$\frac{\partial \Sigma e^2}{\partial b_1} = -2\Sigma\ (y - b_1 x_1 - b_2 x_2)\ (x_1) = 0$$

$$\frac{\partial e^2}{\partial b_2} = -2\Sigma\ (y - b_1 x_1 - b_2 x_2)\ (x_2) = 0$$

أما الثابت b_0 فيتم الحصول عليه بجمع طرفي معادلة الانحدار $Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$ وقسمة الناتج على n كالآتي:

$$\frac{\Sigma Y}{n} = \frac{b_0 n}{n} + \frac{b_1 \Sigma X_1}{n} + \frac{b_2 \Sigma X_2}{n}$$

$$\overline{Y} = b_0 + b_1\overline{X_1} + b_2\overline{X_2}$$

إذن:

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X_1} - b_2\overline{X_2}$$

أما تباين توزيع المعاينة لمعامل الانحدار الجزئي، والذي يستخدم في اختبار الفروض وتكوين فترات الثقة فهو:

$$S^2_{b_1} = \frac{SS_{Resd}}{n\text{-}k\text{-}1} \cdot \frac{\Sigma x_2^2}{(\Sigma x_1^2)\ (\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

$$S^2_{b_2} = \frac{SS_{Resd}}{n-k-1} \cdot \frac{\Sigma x_1^2}{(\Sigma x_1^2)\ (\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

ويصاغ فرض العدم (H_0) والفرض البديل (H_1) في حالة الانحدار المتعدد كالآتي:

فرض العدم: كل معاملات الانحدار الجزئية في المجتمع الإحصائي تساوي صفراً.

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 ...... = \beta = 0$$

الفرض البديل : على الأقل فإن إحدى معاملات الانحدار الجزئية في المجتمع الإحصائي لا تساوي صفراً. (بمعنى أنه على الأقل يوجد متغير مستقل ـ من بين المتغيرات المستقلة ـ جوهري من الناحية الاحصائية).

ويمكن اختبار جوهرية معامل الانحدار الجزئي باستخدام اختبار t الاحصائي، كالآتي:

$$t = \frac{b_i - \beta}{S_{b_i}}$$

كذلك يمكننا صياغة فترة الثقة لمعامل الانحدار الجزئي:

$$\beta = b_i \mp t_{(0.05,\ n-k-1)} S_{b_i}$$

وأخيراً تجدر الإشارة إلى ضرورة الانتباه في تفسير معاملات الانحدار الجزئية، في حالة استخدام بيانات لسلاسل زمنية (Time series data)، وفي حالة استخدام بيانات عن متغيرات مأخوذة في نقطة زمنية محددة (Cross section - data).

دعنا نفترض أن أحد الباحثين، يرغب في تحديد الاختلافات في الانفاق السنوي الاستهلاكي، على السلعة Z (مُقاساً بالمائة ليرة)، لعينة من العائلات، من خلال معرفته بالاختلافات على متغيرين مستقلين: X_1 (الدخل السنوي للعائلات مقاساً بالألف ليرة) وX_2 (حجم العائلة مُقاساً بعدد أفراد الأسرة)، وأنه حصل على معادلة الانحدار الآتية:

$$\hat{Y} = 4.20 + 3.49X_1 - 0.57X_2$$

فحينئذٍ باستطاعته تفسير b_1، على أنه إذا كان لدينا عائلتين بنفس

الحجم (عدد أفراد الأسرة)، بحيث يزيد دخل العائلة الأولى، على دخل العائلة الثانية، بمقدار وحدة قياس واحدة (ألف ليرة)، فإن الانفاق الاستهلاكي التقديري للعائلة الأولى على السلعة Z، سوف يزيد عن انفاق العائلة الثانية على السلعة Z، بمقدار 3.49 من وحدة القياس للمتغير التابع (مائة ليرة). أي أنه إذا كان لدينا عائلتين **بنفس الحجم**، بحيث يزيد دخل إحدى العائلتين على دخل العائلة الأخرى، بمقدار ألف ليرة، فإن الانفاق الاستهلاكي، على السلعة Z، للعائلة الأولى سيزيد على الانفاق الاستهلاكي على السلعة Z للعائلة الثانية، بمقدار 349 ليرة. ويمكننا تفسير b_2 على أنه إذا كان لدينا عائلتين، **متساويتين في الدخل السنوي**، لكن يزيد عدد أفراد العائلة الثانية على عدد أفراد العائلة الأولى بشخص واحد، فإن الإنفاق الاستهلاكي على السلعة Z للعائلة الثانية، سيكون أقل من الانفاق الاستهلاكي على السلعة Z للعائلة الأولى، بمقدار 57 ليرة. أي باختصار فإن معامل الانحدار الجزئي يقيس أثر التغير في X_i على Y، مع بقاء أثر بقية المتغيرات المستقلة الأخرى ثابتاً (Ceteris paribus).

لنفرض الآن أن باحثاً آخراً رغب في دراسة أثر أسعار الأسهم العادية مقاساً بالرقم القياسي للأسهم العادية (Price index for common stocks) بالفترة الحالية، وأثر الأرباح غير الموزعة (Retained earnings) بالفترة الحالية، مقاساً بالمليون ليرة، وأثر سعر الفائدة (The interest rate at which funds could be borrowed)، على حجم الاستثمار في الفترة اللاحقة (The level of investment)، مقاساً بالمليون ليرة، فجمع بيانات فصلية (Quarterly data) وحصل على معادلة الانحدار التالية:

$$\hat{Y} = 2.3 + 0.091X_1 + 1.87X_2 + 0.02X_3$$

فحينئذٍ يمكنه تفسير معامل الانحدار الجزئي b_1، على أنه إذا تغير الرقم

القياسي لأسعار الأسهم العادية بنقطة واحدة (One-point change)، مع بقاء أثر بقية المتغيرات الأخرى ثابتاً (Ceteris paribus)، فإن الاستثمار في الفترة اللاحقة سيزيد بمقدار 0.091 من المليون ليرة. وبنفس المنطق يمكننا تفسير b_2 و b_3 على أنها معدّل التغير في Y نتيجة تغير X_i بوحدة قياس واحدة، مع بقاء أثر بقية المتغيرات المستقلة الأخرى ثابتاً.

ثانياً: الحصول على معاملات الانحدار الجزئية باستخدام المصفوفات للوحدات الخام*:

باستطاعة الباحث بدلاً من استخدام المعادلات الطبيعية في الحصول على معاملات الانحدار الجزئية، أن يلجأ إلى استخدام المصفوفات (Matrices) لهذا الغرض، علماً أن طريقة المصفوفات، هي الطريقة المستخدمة في برامج الكمبيوتر (Computer software) لتحليل الانحدار. فلو فرضنا على سبيل المثال، أننا نرغب في تحليل انحدار المتغير التابع Y على المتغيرين المستقلين X_1 و X_2، فيمكننا وقتئذٍ صياغة معادلة الانحدار بالوحدات الخام كالآتي:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 \qquad (1)$$

وبجمع طرفي المعادلة (1) نحصل على:

$$\Sigma Y = b_0 n + b_1 \Sigma X_1 + b_2 \Sigma X_2 \qquad (2)$$

وبضرب طرفي المعادلة (1) بالمتغير X_1 وجمع طرفي المعادلة نحصل:

$$\Sigma X_1 Y = b_0 \Sigma X_1 + b_1 \Sigma X_1^2 + b_2 \Sigma X_1 X_2 \qquad (3)$$

* يقصد بالوحدات الخام (Raw scores) القياسات الأصلية (Original scores) على المتغير والتي لم تخضع بعد إلى أية معالجة إحصائية (Statistical treatment).

وبضرب طرفي المعادلة (1) بالمتغير X_2 وجمع طرفي المعادلة نحصل على:

$$\Sigma X_2Y = b_0\Sigma X_2 + b_1\Sigma X_1X_2 + b_2\Sigma X_2^2 \qquad (4)$$

ويمكن صياغة المعادلات الطبيعية (2) و (3) و (4) في شكل مصفوفات كالآتي:

$$\underset{(X'X)}{\begin{bmatrix} n & \Sigma X_1 & \Sigma X_2 \\ \Sigma X_1 & \Sigma X_1^2 & \Sigma X_1X_2 \\ \Sigma X_2 & \Sigma X_1X_2 & \Sigma X_2^2 \end{bmatrix}} * \underset{b}{\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}} = \underset{(X'Y)}{\begin{bmatrix} \Sigma Y \\ \Sigma X_1Y \\ \Sigma X_2Y \end{bmatrix}}$$

علماً أن المصفوفة الأولى، إلى أقصى الشمال، هي في الحقيقة عبارة عن حاصل ضرب المصفوفة التي تحتوي على المتغيرات المستقلة X بالمصفوفة المحورة X′ (Transpose). في حين أن الموجه (Vector) إلى أقصى اليمين هو في الحقيقة عبارة عن حاصل ضرب المصفوفة المحورة X′ بالموجه Y.

دعنا نفترض للتوضيح أنه لدينا البيانات الفرضية التالية لأربعة مشاهدات (Observations) على المتغيرات Y و X_1 و X_2:

X_1	X_2	Y
X_{11}	X_{12}	Y_1
X_{21}	X_{22}	Y_2
X_{31}	X_{32}	Y_3
X_{41}	X_{42}	Y_4

حيث ترمز الرموز السفلية (Subscripts) إلى المشاهدة (Observation) وإلى المتغير على التوالي، فمثلاً X_{11} ترمز إلى المشاهدة الأولى في المتغير الأول، في حين ترمز X_{32} إلى المشاهدة الثالثة في المتغير الثاني وهكذا. . .

دعنا نحصل على X'X:

$$\underset{X'}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ X_{11} & X_{21} & X_{31} & X_{41} \\ X_{12} & X_{22} & X_{32} & X_{42} \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} \\ 1 & X_{21} & X_{22} \\ 1 & X_{31} & X_{32} \\ 1 & X_{41} & X_{42} \end{bmatrix}} = \underset{(X'X)}{\begin{bmatrix} n & \Sigma X_1 & \Sigma X_2 \\ \Sigma X_1 & \Sigma X_1^2 & \Sigma X_1 X_2 \\ \Sigma X_2 & \Sigma X_1 X_2 & \Sigma X_2^2 \end{bmatrix}}$$

علماً أن إضافة المتغير الوهمي (dummy variable)، والذي يأخذ القيم واحد (A unit vector) للمصفوفة X هو ضروري للحصول على قيمة الثابت b_0 [1].

دعنا الآن نحصل على X'Y:

$$\underset{X'}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ X_{11} & X_{21} & X_{31} & X_{41} \\ X_{12} & X_{22} & X_{32} & X_{42} \end{bmatrix}} \underset{Y}{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix}} = \underset{(X'Y)}{\begin{bmatrix} \Sigma Y \\ \Sigma X_1 Y \\ \Sigma X_2 Y \end{bmatrix}}$$

إذن نخلص إلى أنه يمكننا كتابة المعادلات الطبيعية (2) و (3) و (4)، في شكل مصفوفات كالآتي:

$$(X'X)\ b = (X'Y)$$

وبضرب طرفي المعادلة قبلياً (Premultiply) بالمصفوفة $(X'X)^{-1}$ نحصل على:

$$b = (X'X)^{-1}\ (X'Y)$$

---

(1) Ward, J.H., and Jennings, E., "Introduction to linear Models". prentice-Hall international, Inc., 1973 pp: 26-28.

وهي المعادلة المطلوبة للحصول على معاملات الانحدار الجزئية باستخدام المصفوفات للوحدات الخام.

أما بالنسبة لتباين توزيع المعاينة لمعامل الانحدار الجزئي، في حالة استخدام المصفوفات، فيساوي إلى:

$$S^2_{b_0} = C_{00} \cdot \frac{SS_{Resd}}{n - k - 1}$$

$$S^2_{b_1} = C_{11} \cdot \frac{SS_{Resd}}{n - k - 1}$$

$$S^2_{b_2} = C_{22} \cdot \frac{SS_{Resd}}{n - k - 1}$$

علماً أن القيم C_{00}، C_{11}، و C_{22} هي القيم القطرية (Diagonal values) في مقلوب (Inverse) المصفوفة (X'X) [1]:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

الجدير بالذكر، أنه في حالة استخدام المصفوفات للوحدات الخام فإن $\Sigma e^2 = e'e$، كما وأن مجموع الاختلافات الكلية للمتغير التابع يساوي إلى:

$$SS_T = (Y'Y) - n\bar{Y}$$

ثالثاً: الحصول على معاملات الانحدار الجزئية باستخدام مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات:

(1) Yamane, pp:953 - 957

تعتبر طريقة استخدام مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات، من أسهل، وأفضل، الطرق إطلاقاً، في الحصول على معاملات الانحدار الجزئية.

ويتم الحصول على معاملات الانحدار الجزئية بالوحدات المعيارية (Standard partial regression coefficients) باستخدام المعادلة الآتية*:

$$\beta = R^{-1} \cdot V$$

علماً أن:

β: هي الموجه (Vector) الذي يحتوي على معاملات الانحدار الجزئية بالوحدات المعيارية (Beta weights).

R^{-1}: هي مقلوب (Inverse) مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات المستقلة.

V: وهي الموجه (Vector) الذي يحتوي على معاملات الارتباط بين المتغير التابع وبين المتغيرات المستقلة.

الجدير بالذكر أنه باستطاعة الباحث تحويل معاملات الانحدار الجزئية بالوحدات المعيارية، إلى معاملات انحدار جزئية بالوحدات الخام، وذلك باستخدام المعادلة التي مرت معنا في الفصل الثاني:

$$b = \beta \frac{S_Y}{S_x}$$

---

* لاحظ أنه فيما يتعلق بتفسير (Interpreting) معاملات الانحدار الجزئية بالوحدات المعيارية، فهو نفس التفسير الذي مر معنا عن معاملات الانحدار بالوحدات الخام، اخذين في الاعتبار أن وحدة القياس للمتغيرات هي الانحراف المعياري.

أما فيما يتعلق بتباين توزيع المعاينة لمعامل الانحدار الجزئي بالوحدات الخام، فيمكننا الحصول عليه كالآتي:[1]

$$S_b^2 = \frac{\frac{SS_{Resd}}{n-k-1}}{\Sigma x^2(1 - R_j^2)}$$

علماً أن R_j^2، هي معامل التحديد المتعدد، بين المتغير المستقل الذي يراد تقييم أهميته النسبية، وبين بقية المتغيرات المستقلة، ويتم الحصول عليه بسهولة باستخدام المعادلة الآتية:

$$R_j^2 = 1 - \frac{1}{r^j}$$

حيث أن r^j هي القيمة القطرية في مقلوب مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات المستقلة R^{-1}، والتي استخدمت في الحصول على معاملات الانحدار الجزئية بالوحدات المعيارية.

رابعاً: الحصول على معاملات الانحدار بالوحدات الخام باستخدام البواقي:

تعتبر طريقة استخدام البواقي (Residuals) من أصعب الطرق من حيث العمليات الحسابية، لكن هذه الطريقة هي أكثر الطرق فائدة، لأنها توضح بشكل مفصّل طبيعة ما يجري بين المتغيرات في تحليل الانحدار المتعدد. فكما ذكرنا سابقاً، فإن معاملات الانحدار b_1 و b_2 تعرف باسم معاملات الانحدار الجزئية في معادلة الانحدار:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$$

حيث يقيس معامل الانحدار الجزئي b_i، معدل التغير في Y والناتج عن تغير في

(1) Kerlinger and pedhazur, pp:65-67

المتغير المستقل بوحدة قياس واحدة مع بقاء أثر بقية المتغيرات المستقلة الأخرى ثابتاً من الناحية الإحصائية. ويقصد بذلك. أنه لو استبعدنا أثر X_2، من X_1، ثم أوجدنا معامل انحدار المتغير التابع Y على ما تبقى من X_1 بعد حذف تأثير X_2، لحصلنا على معامل الانحدار الجزئي b_1. كذلك فلو استبعدنا تأثير X_1 من X_2، ثم أوجدنا معامل انحدار Y على ما تبقى من X_2 بدون تأثير X_1، لحصلنا على معامل الانحدار الجزئي b_2.

معامل التحديد المتعدد:

(The coefficient of multiple determination)

يعرف معامل التحديد المتعدد R^2 على أنه نسبة التباين في الاختلافات الكلية في المتغير التابع، والتي تم تحديدها (تفسيرها) بانحدار Y على المتغيرات المستقلة X'S. علماً أنه يوجد العديد من الطرق لاحتساب قيمة R^2 وأهم هذه الطرق هي:

$$R^2 = \frac{SS_{Reg}}{SS_T} = 1 - \frac{SS_{Resd}}{SS_T} \qquad (1)$$

دعنا نفترض أننا ندرس الحالة البسيطة لانحدار Y على X_1 و X_2، وعلى افتراض أن المتغيرات مقاسة في شكل انحرافات عن الوسط الحسابي (للتبسيط)، فإن:

$$SS_{Resd} = \Sigma e^2 = \Sigma e\,(y - \hat{y}) = \Sigma e\,(y - b_1x_1 - b_2x_2)$$

$$SS_{Resd} = \Sigma ey - b_1\Sigma ex_1 - b_2\Sigma ex_2 \qquad (2)$$

وهنا نلاحظ أن Σex_1 و Σex_2 تساوي الصفر، وذلك واضح من عملية الحصول على المعادلات الطبيعية لمستوى الانحدار لأن:

$$\frac{\partial e^2}{\partial b_1} = -2\Sigma\,(y - b_1x_1 - b_2x_2)\,(x_1) = 0$$

إذن :

$$-2\ \Sigma ex_1 = 0$$

كذلك فإن :

$$\frac{\partial e^2}{\partial b_2} = -2\ \Sigma\ (y - b_1x_1 - b_2x_2)\ (x_2) = 0$$

إذن :

$$-2\Sigma\ ex_2 = 0$$

وبذلك تصبح المعادلة (2) كالآتي :

$$S\ S_{Resd} = \Sigma ey \tag{3}$$

وبإستبدال e في (3) بقيمتها من معادلة الإنحدار نحصل على :

$$S\ S_{Resd} = \Sigma y\ (y - b_1x_1 - b_2x_2)$$

$$S\ S_{Resd} = \Sigma y^2 - b_1\ \Sigma x_1y - b_2\ \Sigma\ x_2y \tag{4}$$

وباستبدال قيمة $S\ S_{Resd}$ في (1) بقيمتها من (4) نحصل على :

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma y^2 - b_1\Sigma x_1y - b_2\ \Sigma x_2y}{\Sigma y^2}$$

إذن :

$$R^2 = \frac{b_1\ \Sigma x_1y + b_2\ \Sigma x_2y}{\Sigma y^2} \tag{5}$$

يتضح من المعادلة الأخيرة، أن إضافة أي متغير مستقل إلى معادلة الإنحدار، سترفع من قيمة معامل التحديد المتعدد R^2، ذلك لأن المقام Σy^2 (Denominator) ثابت القيمة، مهما كان عدد المتغيرات المستقلة. لكن تزيد قيمة البسط (Numerator)، بمقدار Σxy عند إضافة المتغير X إلى المعادلة.

وتجدر الإشارة أخيراً إلى وجود طرق أخرى للحصول على معامل التحديد المتعدد، ففي حالة استخدام المصفوفات للوحدات الخام فإنه يمكن الحصول على R^2 كالآتي:[1]

$$R^2 = \frac{b'(X'Y) - n\overline{Y}^2}{(Y'Y) - n\overline{Y}^2}$$

علماً أن:

$$(Y'Y) = \Sigma Y^2$$

كذلك يمكن الحصول على R^2 في حالة استخدام مصفوفة معاملات الإرتباط بين المتغيرات كالآتي:[2]

$$R^2 = V_1\beta_1 + V_2\beta_2 .... + V_K\beta_K$$

لكن الجدير بالذكر، هو إن إضافة أي متغير مستقل إلى معادلة الإنحدار سترفع من قيمة معامل التحديد المتعدد، لذلك يتوجب على الباحث (ولكي يتمكن من أن يأخذ في الإعتبار الإنخفاض الناتج في درجات الحرية $n-k-1$، بسبب إضافة أي متغير مستقل إلى معادلة الإنحدار والذي من شأنه أن يجعل قيمة R^2 متحيزة نحو الأعلى — upward biased —) أن يحصل على معامل التحديد المعدّل (Adjusted R^2) وذلك بإستخدام المعادلة الآتية:*

$$\overline{R}^2 = 1 - [(1 - R^2)\frac{n - 1}{n-k-1}] \qquad (6)$$

يتضح في المعادلة (6)، أنه عندما يزيد عدد المتغيرات المستقلة في معادلة

---

(1) Johnstom P: 129.

(2) Kerlinger and Pedhazur, P: 75.

* المقصود بالتحيز نحو الأعلى هو أن قيمة R^2 التي نحصل عليها من بيانات العينة تعطي تقديراً أكبر من قيمة R^2 في المجتمع الإحصائي. للتوسع انظر:

Kerlinger and Pedhazur, PP:282-283.

الإنحدار، إلى أن تصبح $K = n-1$، فإن قيمة $n-k-1$ حينئذٍ تصبح صفراً، وبالتالي فلا يوجد عندئذٍ درجات حرية للإختلافات غير المفسرة، فتصبح الإختلافات غير المفسرة $(1-R^2)$ مساوية للصفر، وتصبح قيمة $R^2=1$.

ونخلص بذلك إلى أنه إذا كان لدينا 10 مشاهدات (Observations) وأخذنا 9 متغيرات مستقلة في معادلة الإنحدار فإن درجات الحرية $(N-k-1)=n-(n-1)-1=0$، وبالتالي فإن قيمة $R^2=1$. كذلك فإنه إذا كانت n صغيرة و K كبيرة مقارنة بحجم العينة n، فإن $\overline{R}^2$ ستكون أصغر بكثير من R^2، حتى وأن قيمة $\overline{R}^2$ في هذه الحالة قد تكون سلبية (Negative)، بالرغم من أن قيمة $0 \geqslant R^2 \geqslant 1$. فلو فرضنا أن $n=10$، $K=6$، و$R^2=0.50$، فإن:

$$\overline{R}^2 = 1 - [(1 - 0.50) \frac{10-1}{10-6-1}] = 1 - (1.50) = -.50$$

لذلك نجد أن الإحصائيين، يدعون إلى أخذ الحيطة والحذر عند استخدام الإنحدار المتعدد، فيرى بعضهم أن نأخذ في تحليل الإنحدار 30 مشاهدة لكل متغير مستقل في معادلة الإنحدار. في حين يرى بعضهم الآخر، أن لا يقل حجم العينة عن 200 مشاهدة، وأن لا يزيد حجم العينة عن 600مشاهدة. دعنا نفترض أن قيمة R^2 لإنحدار Y على ثلاثة متغيرات مستقلة تساوي 0.36، ولنفترض أننا نرغب في الحصول على قيمة $\overline{R}^2$ عندما يكون حجم العينة مساوياً إلى 10 مشاهدات، 90 مشاهدة و 150 مشاهدة على التوالي فإن:

$$\overline{R}^2 = 1 - [(1 - 0.36) \frac{10-1}{10-3-1}] = 0.19$$

$$\overline{R}^2 = 1 - [(1 - 0.36) \frac{90-1}{90-3-1}] = 0.34$$

$$\overline{R}^2 = 1 - [(1 - 0.36) \frac{150-1}{150-3-1}] = 0.35$$

أي أنه كلما إزداد حجم العينة كلما اقتربت قيمة $\overline{R}^2$ من قيمة R^2. علماً أن $\overline{R}^2$ تستخدم كتقدير لمعامل التحديد المتعدد في المجتمع الإحصائي.

تقييم الأهمية النسبية للمتغيرات المستقلة في تحديد تباين المتغير التابع:

لا شك أن الهدف من تحليل الإنحدار المتعدد هو تقييم الأهمية النسبية للمتغيرات المستقلة في تحديد الإختلافات الكلية في المتغير التابع (Evaluating the relative importance of the independent variables in explaining the variation of the dependent variable). علماً أنه باستطاعة الباحث، تقييم الأهمية النسبية للمتغير المستقل، وذلك بإختبار جوهرية (Significance) معامل الإنحدار من الناحية الإحصائية. لكن نظراً لوجود نماذج متكافئة (Equivalent Models)، ناتجة عن متغير مستقل دالة في متغير مستقل آخر (linear dependency)، ونظراً لأن النماذج المتكافئة تعطي ذات القيمة لمعامل التحديد المتعدد، وتعطي قيمة جوهرية لمعامل الإنحدار b_1 و b_2 على الرغم من أن $X_1 = F(x_2)$، لذلك يُفضل تقييم الأهمية النسبية للمتغيرات المستقلة بإستخدام اختبار -F الإحصائي، وذلك لتقييم الإنخفاض في قيمة معامل التحديد المتعدد من النموذج التام (Full Model) إلى النموذج المقيد (Restricted Model)، فعلى افتراض أننا ندرس إنحدار Y على ثلاثة متغيرات مستقلة في معادلة الإنحدار التقديرية:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3$$

فإن معامل التحديد المتعدد لهذا النموذج يعرف بإسم معامل التحديد المتعدد للنموذج التام. وبإستطاعة الباحث تقييم الأهمية النسبية لأي متغير مستقل، وذلك بحذفه من معادلة الإنحدار للنموذج التام، ثم تقييم الإنخفاض في قيمة معامل التحديد المتعدد.

فإذا رغب الباحث في تقييم الأهمية النسبية للمتغير X_3، فإنه يحذفه من النموذج التام، ويحصل على النموذج المقيد:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$$

ويعرف معامل التحديد لهذا النموذج بإسم معامل التحديد للنموذج المقيد. ولتقييم الإنخفاض في قيمة معامل التحديد المتعدد، من النموذج التام R_F^2 إلى النموذج المقيد R_R^2، فإنه بإستطاعة الباحث استخدام اختبار -F الإحصائي:

$$F = \frac{(R_F^2 - R_R^2) / (K_1 - K_2)}{(1 - R_F^2) / (n - k_1 - 1)}$$

علماً أن K_1 تمثل درجات الحرية في النموذج التام، بينما تمثل K_2 درجات الحرية في النموذج المقيد.

ولتقييم الأهمية النسبية للمتغير X_2 ، فعلى الباحث أن يعيد X_3 إلى النموذج، ثم يحذف X_2 من النموذج التام ليحصل على النموذج المقيد:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_3X_3$$

ومن ثم يقيّم الإنخفاض في قيمة معامل التحديد المتعدد، من النموذج التام إلى النموذج المقيد. آخذين في الإعتبار أن قيمة معامل الإنحدار b_1 في النموذج التام، ستختلف بالطبع عن قيمة b_1 في النموذج المقيد. كذلك فبإستطاعة الباحث أن يقيّم الأهمية النسبية لمجموعة من المتغيرات المستقلة في آنٍ واحد، وذلك بحذفها من النموذج التام، واختبار الإنخفاض في معامل التحديد المتعدد، من النموذج التام إلى النموذج المقيد، وذلك باستخدام اختبار -F الإحصائي. آخذين في الإعتبار أن ضرورة الحصول على النموذج المقيد لتقييم الأهمية النسبية للمتغير المستقل، تنتفي إذا لم يكن معامل التحديد للنموذج التام جوهري (Significant) من الناحية الإحصائية. علماً أن قيمة الإنخفاض في معامل التحديد من النموذج التام إلى النموذج المقيد $(R_F^2 - R_R^2)$ تساوي إلى

القيمة المربعة لمعامل الإرتباط نصف الجزئي (Semi partial correlation)، والذي سيتم مناقشته في الفقرة القادمة. *

تجدر الإشارة أخيراً، إلى أننا سوف نحصل على نفس القيمة لمعامل التحديد R^2، مهما اختلفت تراتيب المتغيرات المستقلة. لكن الأهمية النسبية للمتغيرات المستقلة، سوف تختلف بإختلاف تراتيبها في معادلة الإنحدار، فعلى افتراض أننا ندرس إنحدار Y على 10متغيرات مستقلة، فإن المتغير X_6مثلاً، سيحدد جزءاً أكبر من الإختلافات الكلية في Y، إذا تمّ إدخاله في معادلة الإنحدار قبل غيره من المتغيرات، وسيحدد جزءاً أصغر من الإختلافات الكلية في Y، إذا تمّ إدخاله آخراً (بعد إدخال بقية المتغيرات) في معادلة الإنحدار، وذلك بالرغم من أن قيمة R^2 للنموذج التام، لن تتغير سواءً أدخلنا X_6 في بداية أو في نهاية معادلة الإنحدار. لذلك يتوجب على الباحث الإعتماد بشكل أساسي على النظرية الإقتصادية، ونتائج البحوث السابقة، وعلى الأسس المنطقية، في ترتيب متغيراته المستقلة في معادلة الإنحدار. علماً أن طريقة الحل التقدمي على خطوات (Stepwise solution) تساعد كثيراً في هذا المجال كما وأنها تستخدم في برامج الكمبيوتر الجاهزة والمعروفة باسم SPSS (Statistical Packages for the Social Science)، والبرنامج BMD (Biomedical Statistical Package).

معاملات الإرتباط الجزئية:

تعتبر معاملات الإرتباط الجزئية (Partial correlation)، من أهم

---

* يدعى الأسلوب الموضح أعلاه لتقييم الأهمية النسبية للمتغيرات المستقلة بالحل التراجعي (Backward solution). علماً أنه يوجد عدة طرق لهذا الغرض أهمها الحل التقدمي على خطوات (Stepwise solution) لكن يتميز الحل التراجعي على غيره من الحلول بالبساطة، خاصة إذا كان الباحث يستخدم الآلة الحاسبة بدلاً من البرامج الموجودة في مكتبات الكمبيوتر (BMD)، (SPSS).

وسائل الرقابة الإحصائية (Statistical control). ذلك لأن معامل الإرتباط الجزئي، يقيس العلاقة الحقيقية بين متغيرين، بعد حذف أثر بقية المتغيرات الأخرى من المتغيرين معاً. فعلى سبيل المثال، لو فرضنا أننا ندرس إنحدار Y على X_1 و X_2، فإن معامل الإرتباط الجزئي بين Y و X_2، يقيس العلاقة الحقيقية بين Y و X_2، بعد حذف أثر X_1 من كِلا المتغيرين Y و X_2 معاً. فعلى سبيل المثال دعنا نفترض أن Y هي انتاج القمح (Wheat production)، و X_1 تمثل معدل سقوط الأمطار (Rainfall)، بينما تمثل X_2 الحرارة (Temperature)، فبإستطاعة الباحث مثلاً، الحصول على معامل الإرتباط البسيط (Simple correlation coefficient) بين إنتاج القمح وبين تساقط الأمطار، متجاهلاً في ذلك أثر الحرارة، على كلٍ من إنتاج القمح والأمطار، وقد يكون معامل الإرتباط البسيط قوي وموجب لكنه سيعطي بلا شك نتائج مضللة (Misleading results). ذلك لأن معامل الإرتباط البسيط بين متغيرين، يعطي مقياس للعلاقة الزائفة (Spurious relation) بين المتغيرين، علماً أنه لا يوجد متغيرين في فراغ، دون أن يتأثرا بمتغيرات أخرى. ففي مثالنا أعلاه، فإننا نتوقع الحصول على علاقة طردية بسيطة وقوية بين الأمطار وإنتاج الحبوب، بمعنى أن زيادة الأمطار تزيد المحصول، كذلك نتوقع أن تكون العلاقة البسيطة، بين الحرارة وإنتاج الحبوب، طردية وقوية، بمعنى أن تزايد الحرارة يزيد المحصول، لكن إذا رغبنا في دراسة العلاقة الحقيقية بين الحرارة والمحصول فلا بدّ من حذف أثر الأمطار على كلٍ من المحصول والحرارة معاً. وكمثال آخر عن العلاقة الزائفة (Nonsense correlation)، دعنا نفترض أننا أخذنا سلسلتين زمنيتين (Time series data) لحوادث السرقات (متغير تابع)، ولعدد التلفزيونات المباعة (متغير مستقل)، فقد نحصل على علاقة طردية قوية جداً بين المتغيرين، لكن يجب الحذر عند تفسير هذه العلاقة البسيطة القوية، فقد لا يكون زيادة مبيعات التلفزيونات سبباً في

زيادة حوادث السرقات، بمعنى أن العلاقة بين المتغيرين، قد تكون زائفة، وناتجة عن ارتباط المتغيرين معاً، بمتغير ثالث وهو الزمن. وما أن نُدخل عامل الزمن في معادلة الإنحدار، ونحذف أثر الزمن من كِلا المتغيرين، حتى تتضاءل أو تنعدم العلاقة بين هذين المتغيرين اللذين يزيدان معاً عبر الزمن.

ويمكن صياغة معادلة الإرتباط الجزئي بين Y و X_1، مع حذف أثر X_2 كالآتي: *

$$r_{y1.2} = \frac{r_{y1} - r_{y2}\, r_{12}}{\sqrt{(1 - r^2_{y2}}\sqrt{(1 - r^2_{12})}}$$

معامل الإرتباط الجزء (نصف الجزئي):

تعتبر معاملات الإرتباط الجزء (Part or semi partial correlation)، من أهم المعاملات المستخدمة في تقييم الأهمية النسبية للمتغيرات المستقلة في تنبؤ قيم المتغير التابع. علماً أن الإختلاف الأساسي، بين معاملات الإرتباط الجزئية، ومعاملات الإرتباط النصف، جزئية، هو أنه في الحالة الأولى نستبعد أثر كل المتغيرات المستقلة الأخرى من المتغير Y والمتغير المستقل X معاً (في آن واحد). بينما في الحالة الثانية لمعامل الإرتباط نصف الجزئي فإننا نستبعد أثر المتغيرات المستقلة الأخرى من المتغير المستقل فقط، ومثال ذلك:

$$r_{y(2.1)} = \frac{r_{y2} - r_{y1}\, r_{12}}{\sqrt{1 - r^2_{12}}}$$

والذي يقيس العلاقة بين Y و X_2 مع استبعاد أثر X_1 من X_2 فقط. وتجدر الإشارة أخيراً، إلى أنه باستطاعة الباحث الحصول على معامل الإرتباط الجزئي ونصف الجزئي بإستخدام البواقي.

---

* للتوسع في هذا الموضوع انظر: Yamane, P: 940

أمثلة تطبيقية:

مثال (1): تحديد مستوى الدخل القومي في الأردن:

دعنا نفترض أن أحد الباحثين يرغب في اختبار ما ورد في النظرية الكينزيه، من أن زيادة الانفاق الحكومي (الاستهلاكي والاستثماري) يرفع مستوى الدخل القومي. ويرغب في الاستفادة مما ورد في النظرية النقدية لفريدمان، من أن زيادة عرض النقود يؤدي إلى زيادة الدخل القومي، فجمع البيانات الموضحة في الجدول رقم (1)، عن الناتج القومي الاجمالي GNP، الانفاق الحكومي G، وعرض النقود M (بالمليون دينار)، في الأردن للفترة 1970-1977: *

* تم الحصول على البيانات للجدول رقم (١) من المصادر الآتية:

- الأمم المتحدة اللجنة الاقتصادية لغربي آسيا. «دراسات الدخل القومي». عام 1981، ص ص: 64-68.
- الأمم المتحدة: المجلس الاقتصادي والاجتماعي. «المجموعة الاحصائية للعالم العربي». عام 1977، ص: 28.
- IMF عام 1979 ص ص: 216-219.

علماً أنه بالنسبة للانفاق الحكومي فقد تم الاكتفاء بالانفاق الاستهلاكي دون الاستثماري نظراً لعدم توافر البيانات. أما فيما يتعلق بعرض النقود، فإن صندوق النقد الدولي يعرف (عرض) الكمية النقدية على أنها المجموع الصافي للنقود المتداولة خارج البنوك (Currency out side banks)، بالإضافة إلى الودائع الجارية لدى البنوك التجارية (Demand deposits). للتوسع انظر:

Dernburg & Dernburg., "Macro Economic Analysis: An introduction to comparative statics and Dynamics." Addison- wesley publishing Company, Inc, 1969, pp: 40-45.

الجدول رقم (1)

الناتج القومي الاجمالي (GNP)، الانفاق الحكومي (G) وعرض النقود (M) في الأردن للفترة 1970-1977

(بالمليون دينار)

GNP Y	G X_1	M X_2	Y^2	X_1^2	X_2^2	YX_1	YX_2	X_1X_2	$\hat{Y}$	$e=Y-\hat{Y}$	$e^2=(Y-\hat{Y})^2$
187.0	58.7	105.46	34969.00	3445.69	11121.81	10976.90	19721.02	6190.50	171.38	15.617	243.905
199.4	60.4	108.08	39760.36	3648.16	11681.29	12043.76	21551.15	6528.03	177.61	21.789	474.756
221.0	68.3	115.02	48841.00	4664.89	13229.60	15094.30	25419.42	7855.87	200.87	20.131	405.217
241.5	80.0	139.25	58322.25	6400.00	19390.56	19320.00	33628.88	11140.00	250.47	– 8.970	80.461
279.3	97.7	170.22	78008.49	9545.29	28974.85	27287.61	47542.45	16630.49	319.32	– 40.020	1601.600
345.4	110.1	218.50	119301.16	12122.01	47742.25	38028.54	75469.90	24056.85	396.43	– 51.030	2604.060
545.5	155.9	263.58	297570.25	24304.81	69474.42	85043.45	143782.89	41092.12	536.53	8.971	80.460
626.9	156.6	314.80	393003.61	24523.56	99099.04	98172.54	197348.12	49297.68	593.55	33.350	1112.223
Σ:2646.0	787.7	1434.91	1069776.12	88654.41	300713.82	305967.10	564463.83	162791.54	2646.00	0	6600.00
M:330.75	98.46	179.36									

$$\Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{n} = 1069776.12 - \frac{(2646)^2}{8} = 194611.62$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{n-1}} = 166.74$$

$$\Sigma\ x_1^2 = \Sigma X_1^2 - \frac{(\Sigma X_1)^2}{n} = 88654.41 - \frac{(787.7)^2}{8} = 11095.499$$

$$S_{X1} = \sqrt{\frac{\Sigma x_1^2}{n-1}} = 39.81$$

$$\Sigma x_2^2 = \Sigma X_2^2 - \frac{(\Sigma X_2)^2}{n} = 300713.82 - \frac{(1434.91)^2}{8} = 43342.98$$

$$S_{X2} = \sqrt{\frac{\Sigma x_2^2}{n-1}} = 78.69$$

$$\Sigma x_1 y = \Sigma X_1 Y - \frac{(\Sigma X_1)(\Sigma Y)}{n} = 305967.10 - \frac{(787.7)(2646)}{8} = 45435.33$$

$$\Sigma x_2 y = \Sigma X_2 Y - \frac{(\Sigma X_2)\ (\Sigma Y)}{n} = 564463.83 - \frac{(1434.91)\ (2646)}{8}$$

$$= 89867.35$$

$$\Sigma x_1 x_2 = \Sigma X_1 X_2 - \frac{(\Sigma X_1)(\Sigma X_2)}{n} = 162791.54 - \frac{(787.7)(1434.91)}{8}$$

$$= 21506.72$$

$$r_{yx_1} = \frac{\Sigma x_1 y}{\sqrt{(\Sigma x_1^2)\ (\Sigma y^2)}} = \frac{45435.33}{\sqrt{(11095.499)\ (194611.62)}} = 0.9778$$

$$r_{yx_2} = \frac{\Sigma x_2 y}{\sqrt{(\Sigma x_2^2)\ (\Sigma y^2)}} = \frac{89867.35}{(43342.98)\ (194611.62)} = 0.9785$$

$$r_{12} = \frac{\Sigma x_1 x_2}{\sqrt{\Sigma x_1^2 \ \Sigma x_2^2}} = \frac{21506.72}{\sqrt{(11095.499)\ (43342.98)}} = 0.9807$$

$$b_1 = \frac{(\Sigma x_1 y)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_2 y)(\Sigma x_1 x_2)}{(\Sigma x_1^2)\ (\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

$$b_1 = \frac{(45435.33)\ \ (43342.98)\ - (89867.35)\ (21506.72)}{(11095.499)\ (43342.98)\ - \ (21506.72)^2} = 1.9894$$

$$b_2 = \frac{(\Sigma x_2 y)\ \ (\Sigma x_1^2) - (\Sigma x_1 y)\ \ (\Sigma x_1 x_2)}{(\Sigma x_1^2)\ (\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

$$b_2 = \frac{(89867.35)\ (11095.499) - (45435.33)\ (21506.72)}{(11095.499)\ \ (43342.98)\ - \ (21506.72)^2} = 1.0863$$

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \overline{X}_1 - b_2 \overline{X}_2 = (230.75) - (1.9894)\ (98.46) -$$
$$(1.0863)\ (179.36) \approx -59.96$$

$$S^2_{b_1} = \frac{\Sigma x_2^2}{(\Sigma x_1^2)\ (\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2} \cdot \frac{S\,S_{Resd}}{n-k-1} = \frac{43342.98}{18372986.04} \cdot \frac{6600}{8-2-1}$$
$$= 3.114$$

$$S^2_{b_2} = \frac{\Sigma x_1^2}{(\Sigma x_1^2)\ \ (\Sigma x_2^2)\ - (\Sigma x_1 x_2)^2} \cdot \frac{S\,S_{Resd}}{n-k-1} = \frac{11095.499}{18372986.04} \cdot \frac{6600}{8-2-1}$$
$$= 0.7972$$

$$R^2 = \frac{b_1 \Sigma x_1 y + b_2 \Sigma x_2 y}{S\,S_T} = \frac{(1.99)(45435.33) + (1.086)\ (89867.35)}{194611.62}$$
$$= 0.9660894757$$

$$S\,S_{Resd} = S\,S_T\ (1 - R^2) = 194611.62\ (1 - 0.966) \approx 6600.$$

$$t_1 = \frac{b_1 - 0}{S_{b_1}} = \frac{1.9894}{1.765} = 1.13$$

$$t_2 = \frac{b_2 - 0}{S_{b_2}} = \frac{1.0863}{0.8939} = 1.22$$

$$F = \frac{R^2/K}{(1-R^2)\ /\ (n-k-1)} = \frac{0.966 \div 2}{(1-.966)/(8-2-1)} = 71.03$$

يشير معامل التحديد المتعدد $R^2 = 0.97$، في الجدول رقم (1)، إلى أنه أمكن تحديد 97% من الإختلافات الكلية في الدخل القومي، عن طريق معرفتنا بالإختلافات الكلية في الإنفاق الحكومي وعرض النقود، فزيادة أيٍ من هذين المتغيرين سيزيد الدخل القومي.

الجدير بالذكر، أنه بالرغم من جوهرية (Significance) معامل التحديد المتعدد للنموذج التام، فإننا نلاحظ، أن معاملات الإنحدار الجزئية b_1 و b_2 غير جوهرية من الناحية الإحصائية، ويعود السبب في ذلك، إلى الإرتفاع الكبير في قيمة الخطأ المعياري لمعامل الإنحدار الجزئي (The standard error of estimate) والناتج عن العلاقة القوية بين المتغيرات المستقلة (Serious Multicollinearity)*.

لا شك أن وجود العلاقة القوية بين المتغيرات المستقلة، يجعل من تقييم الأهمية النسبية للمتغيرات المستقلة في تحديد تباين المتغير التابع، أمراً صعباً أو مستحيلاً. ويمكن معالجة هذه المشكلة أحياناً بحذف المتغير المستقل (والذي له

* تجدر الإشارة إلى أن الهدف الأساسي من إعطاء المثال أعلاه هو إظهار المشكلة الحاسمة التي تواجه الباحث في الإقتصاد القياسي، والمتعلقة بوجود العلاقة القوية بين المتغيرات المستقلة (Multicollinearity). علماً أنه قد ينتج عن وجود هذه المشكلة في النموذج الإقتصادي، أن يحصل الباحث على نتائج متناقضة في اختباراته الإحصائية. فقد يحصل على قيمة جوهرية لاختبار معامل التحديد المتعدد، في حين يحصل على قيم غير جوهرية لإختبارات معاملات الإنحدار الجزئية، أو قد يحصل على قيمة غير جوهرية لمعامل التحديد المتعدد، في حين يحصل على قيم جوهرية لمعاملات الإنحدار الجزئية. علماً أن هذه المشكلة قد تؤدي أيضاً إلى حصول الباحث على إشارة جبرية (Sign) لمعامل الإنحدار تكون مخالفة لما ورد في النظرية الإقتصادية. ويساعد في ذلك أيضاً انخفاض قيمة درجات الحرية والناتج عن صِغر حجم العينة كما هو مبين في مثالنا أعلاه. آخذين في الإعتبار أنه يُفضل تحليل المثال أعلاه باستخدام نماذج المعادلات الآنية والتي سنتناولها بالتفصيل في الفصل الثامن.

علاقة قوية بمتغير مستقل آخر) من النموذج. ففي مثالنا أعلاه باستطاعة الباحث حذف G أو M من النموذج. ولو فعل الباحث ذلك لحصل على ذات القيمة لمعامل التحديد، ولحصل على قيم جوهرية لإختبار معامل التحديد ولإختبار معامل الإنحدار. آخذين في الإعتبار أنه إذا كان الهدف من [illegible] النموذج الإقتصادي هو التنبؤ بقيم الظاهرة الإقتصادية، فلا بأس حينئذٍ من الإبقاء على كل المتغيرات المستقلة في النموذج الإقتصادي بالرغم من وجود العلاقة القوية بين متغيرين مستقلين أو أكثر. ذلك لأن وجود هذه المشكلة لا يعطي قيم متحيزة (Biased) لتقديرات المربعات الصغرى. أما إذا كان الهدف هو تفسير الظاهرة، فحينئذٍ يتوجب على الباحث حذف المتغير المستقل (الذي له علاقة قوية بمتغير مستقل آخر) من النموذج. لأنه على الرغم من أن وجود هذه المشكلة تمكن الباحث من التنبؤ (Prediction) بقيم الظاهرة، إلا أنها تقلل من قدرته على تفسير (Explanation) الظاهرة، حيث لا يتمكن الباحث من تقييم الأهمية النسبية للمتغير المستقل في تحديد تباين المتغير التابع.

وتجدر الإشارة أخيراً، إلى أن حذف متغير مستقل من النموذج الإقتصادي، يوقع الباحث في مشاكل مختلفة. دعنا نفترض أن أحد الباحثين يرغب في دراسة الدالة الحقيقية للطلب على سلعةٍ ما:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + U$$

حيث تمثل Y الرقم القياسي لإنتاج السلعة (على افتراض أنه يمثل كمية التوازن للسوق Clearance). وترمز X_1 إلى الرقم القياسي لسعر السلعة، وترمز X_2 إلى الدخل الفردي المتاح. نلاحظ أن هذا النموذج قد يعاني من مشكلة وجود علاقة قوية بين X_1 و X_2 بحيث تحد من قدرة الباحث على تقييم الأهمية النسبية لكلٍ من X_1 أو X_2 في تحديد الإختلافات الكلية في الطلب على السلعة. إلاّ أنه بالرغم من وجود هذه المشكلة، فإن الباحث لا يستطيع حذف X_1 أو X_2 من النموذج. ذلك لأن النظرية الإقتصادية تقترح إدخال كلا المتغيرين معاً في النموذج. وبالتالي، فإذا حذف الباحث أحد المتغيرين من النموذج، فإنه سيقع

في مشكلة الخطأ في تحديد النموذج (Specification error)، والذي من شأنه إعطاء قيم متحيزة (Biased) لتقديرات معاملات الإنحدار، ناتجة عن وجود علاقة بين المتغير المستقل والخطأ العشوائي، ووجود علاقة بين قيم المتغير العشوائي (auto correlation). وبذلك نخلص إلى ضرورة أخذ عينه من المشاهدات كبيرة الحجم، لأن الخطأ المعياري للتقدير يتناقص مع تزايد حجم العينة.

مثال (2): تفسير ظاهرة الإختلاف في معدلات استهلاك الفرد للطاقة الكهربائية في الدول العربية:

تتميز الدول العربية بالتفاوت الكبير في إنتشار وإستهلاك الطاقة الكهربائية. فبينما يتجاوز هذا المعدل 9900 ك. و. س في البحرين، فإنه لا يتعدى 21 ك. و. س في الصومال. ولا شك أن تفسير هذه الظاهرة يتطلب معرفة الإختلاف في كثير من المتغيرات المتعلقة بالنمو الإقتصادي والمستوى الثقافي للبلد. دعنا نفترض للتبسيط أن أحد الباحثين يرغب في تفسير هذه الظاهرة عن طريق معرفته بمتغيرين مستقلين فقط، فجمع البيانات الموضحة في الجدول رقم (2).

يبين الجدول رقم (2) استهلاك الفرد للكهرباء (Per capita electric consumption)، والناتج المحلي الإجمالي للفرد الواحد (Per capita gross domestic product)، والمتغير X_2 (وهو متغير ترميزي لتمييز الدول النفطية عن الدول غير النفطية)، حيث أُعطي الرمز (1) لكل دولة عربية يزيد إنتاج النفط فيها عن نصف مليون برميل يومياً، بينما أُعطيت الدول العربية الأخرى الرمز (0)*. ويبين الجدول رقم (3) العمليات الحسابية للحصول على معاملات الإرتباط ومعاملات الإنحدار الجزئية بالوحدات الخام:

---

* تم الحصول على البيانات من المصادر الآتية:
- التقرير الإقتصادي العربي الموحد عام 1981 ص: 235.
- المؤشرات الإحصائية للعالم العربي للفترة 1970-1978 ص ص: 63-65.

الجدول رقم (2)

استهلاك الفرد للكهرباء ك. و. س (Y)، الناتج المحلي الاجمالي للفرد الواحد بالدولار الأميركي (X_1)، والمتغير الوهمي (الترميزي) X_2 لتمييز الدول العربية النفطية وغير النفطية (عام 1977).

البلد	Y	X_1	X_2
الجزائر	343	1127	1
مصر	420	484	0
الأردن	405	713	0
ليبيا	1520	7375	1
المغرب	260	593	0
عمان	1360	3128	0
السعودية	1320	7636	1
الصومال	21	243	0
سوريا	406	815	0
تونس	388	887	0
الإمارات العربية	5100	16203	1
العراق	743	1578	1
اليمن الشمالي	26	329	0
اليمن الجنوبي	106	264	0
الوسط الحسابي:	887	2955.36	M: 0.357
الانحراف المعياري:	1309.82	4551.29	S: 0.4972

الجدول رقم (3)

Y	X_1	X_2	Y^2	X_1^2	X_2^2	YX_1	YX_2	X_1X_2
343	1127	1	117649	1270129	1	386561	343	1127
420	484	0	176400	234256	0	203280	0	0
405	713	0	164025	508369	0	288765	0	0
1520	7375	1	2310400	54390625	1	11210000	1520	7375
260	593	0	67600	351649	0	154180	0	0
1360	3128	0	1849600	9784384	0	4254080	0	0
1320	7636	1	1742400	58308496	1	10079520	1320	7636
21	243	0	441	59049	0	5103	0	0
406	815	0	164836	664225	0	330890	0	0
388	887	0	150544	786769	0	344156	0	0
5100	16203	1	26010000	262537209	1	82635300	5100	16203
743	1578	1	552049	2490084	1	1172454	743	1578
26	329	0	676	108241	0	8554	0	0
106	264	0	11236	69696	0	27984	0	0
Σ: 12418	**41375**	**5**	**33317856**	**391563181**	5	**111100827**	**9026**	**33919**
M: 887	**2955.36**	**0.35714**						

$$\Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{n} = 33317856 - \frac{(12418)^2}{14} = 22303090$$

$$S_y = 1309.8177$$

$$\Sigma x_1^2 = \Sigma X_1^2 - \frac{(\Sigma X_1)^2}{n} = 391563181 - \frac{(41375)^2}{14} = 269285279.2$$

$$S_{x_1} = 4551.2913$$

$$\Sigma x_2^2 = \Sigma X_2^2 - \frac{(\Sigma X_2)^2}{n} = 5 - \frac{(5)^2}{14} = 3.214286$$

$$S_{x_2} = 0.49725$$

$$\Sigma x_1 y = \Sigma X_1 Y - \frac{(\Sigma X_1)(\Sigma Y)}{n} = 111100827 - \frac{(41375)(12418)}{14}$$

$$\Sigma x_1 y = 74401202$$

$$\Sigma x_2 y = \Sigma X_2 Y - \frac{(\Sigma X_2)(\Sigma Y)}{n} = 9026 - \frac{(5)(12418)}{14} = 4591$$

$$\Sigma x_1 x_2 = \Sigma X_1 X_2 - \frac{(\Sigma X_1)(\Sigma X_2)}{n} = 33919 - \frac{(41375)(5)}{14}$$

$$\Sigma x_1 x_2 = 19142.21429$$

$$r_{yx_1} = \frac{\Sigma x_1 y}{\sqrt{(\Sigma x_1^2)(\Sigma y^2)}} = \frac{74401202}{\sqrt{(269285279.2)(22303090)}} = 0.96$$

$$r_{yx_2} = \frac{\Sigma x_2 y}{\sqrt{(\Sigma x_2^2)(\Sigma y^2)}} = \frac{4591}{\sqrt{(3.214286)(22303090)}} = 0.5422$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{\Sigma x_1 x_2}{\sqrt{(\Sigma x_1^2)(\Sigma x_2^2)}} = \frac{19142.21429}{\sqrt{(269285279.2)(3.214286)}} = 0.6506$$

$$b_1 = \frac{(\Sigma x_1 y)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_2 y)(\Sigma x_1 x_2)}{(\Sigma x_1^2)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

$$b_1 = \frac{(74401202)\ (3.214286)\ - (4591)\ (19142.21429)}{(269285279.2)\ (3.214286)\ - (19142.21429)^2}$$

$$b_1 = 0.303$$

$$b_2 = \frac{(\Sigma\ x_2y)\ (\Sigma\ x_1^2) - (\Sigma\ x_1y)\ (\Sigma\ x_1x_2)}{(\Sigma\ x_1^2)\ (\Sigma\ x_2^2) - (\Sigma\ x_1\ x_2)^2}$$

$$b_2 = \frac{(4591)(269285279.2) - (74401202)(19142.21429)}{(269285279.2)\ (3.214286)\ - (19142.21429)^2}$$

$$b_2 = -376.48$$

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X}_1 - b_2\ \overline{X}_2 = 887 - (0.303)\ (2955.36) - (-376.48)\ (0.35714) = 125.98$$

ومن دراسة الجدول رقم (3)، نخلص إلى:

- أن معامل الإنحدار الجزئي $b_1 = 0.303$ يقيس معدل التغير في Y، نتيجة تغير X_1 بوحدة قياس واحدة، مع بقاء أثر X_2 ثابتاً. آخذين في الإعتبار أن X_2، في هذا المثال، هي متغير ترميزي.*

- إن معادلة التوقع للنموذج التام:

$$\hat{Y} = 125.98 + 0.303\ X_1 - 376.48\ X_2$$

$$R^2_{y.12} = 0.933$$

ويشير معامل التحديد المتعدد إلى أننا استطعنا تحديد 93% من الإختلافات الكلية في استهلاك الفرد للكهرباء بالدول العربية، عن طريق معرفتنا

---

* يلجأ الباحث عادة إلى إدخال المتغير الترميزي في التحليل وذلك لقياس المتغيرات النوعية (qualitative variables). ويساعد المتغير الترميزي في اختبار الإنتقال في الثابت (Shift in the intercept)، أو اختبار التغير في ميل خط الإنحدار (Change in slope)، أو اختبار التغير في الثابت والميل معاً. وسيتم تناول المتغيرات الترميزية بشكل مفصل في الفصل الرابع من هذا المؤلف.

بالإختلافات الكلية في X_1 و X_2. علماً أن:

$$S S_T = \Sigma y^2 = 22303090$$

$$S S_{Reg} = b_1 \Sigma x_1 y + b_2 \Sigma x_2 y = S S_T (R^2_{y.12}) = 20808782.97$$

$$S S_{Resd} = S S_T - S S_{Reg} = S S_T (1 - R^2_{y.12}) = 1494307.03$$

$$R^2_{y.12} = \frac{b_1 \Sigma x_1 y + b_2 \Sigma x_2 y}{S S_T} = \frac{S S_{Reg}}{S S_T} = 93.3\%$$

ولتقييم الأهمية النسبية لمعاملات الإنحدار الجزئية b_1 و b_2 (أي لتقييم الأهمية النسبية للمتغيرات المستقلة في تحديد الإختلافات الكلية في المتغير التابع)، نُصيغ فرض العدم والفرض البديل:

H_0: كل معاملات الإنحدار الجزئية تساوي صفراً (في المجتمع).

H_1: على الأقل، فإن إحدى معاملات الإنحدار الجزئية لا تساوي صفراً.

H_0: All beta weights are 0.

H_1: At least one of the beta weights is not 0.

ويمكننا استخدام اختبار t- في تقييم جوهرية معامل الإنحدار من الناحية الإحصائية، علماً أن:

$$S^2_{b_1} = \frac{\Sigma x_2^2}{(\Sigma x_1^2)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2} \cdot \frac{S S_{Resd}}{n-k-1} = 0.0008748$$

$$S_{b_1} = \sqrt{S^2_{b_1}} = 0.029577$$

$$t_1 = \frac{b_1 - \beta}{S_{b_1}} = \frac{0.303}{0.029577} = 10.24$$

$$S^2_{b_2} = \frac{\Sigma x_1^2}{(\Sigma x_1^2)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2} \cdot \frac{S S_{Resd}}{n-k-1} = 73289.42$$

$$S_{b_2} = 270.72$$

$$t_2 = \frac{b_2 - \beta}{S_{b_2}} = -1.39$$

وبمقارنة قيم اختبار ـ t، مع القيمة الجدولية $t = 2.2$ عند مستوى المعنوية 5% ودرجات الحرية $(dF = n-k-1 = 14-2-1 = 11)$، نخلص إلى أن X_1 تساهم جوهرياً، في تحديد الإختلافات الكلية في المتغير التابع، في حين أن X_2 لا تساهم جوهرياً (من الناحية الإحصائية)، في تحديد تباين المتغير التابع وبالتالي، فباستطاعتنا حذف X_2 من النموذج والإبقاء على X_1 لتوقع قيم Y.

وتجدر الإشارة أخيراً، إلى أنه بالإمكان استخدام اختبار F بدلاً من اختبار t، في تقييم الأهمية النسبية للمتغيرات المستقلة. علماً أن:

النموذج التام:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$$

$$R^2_{y.12} = 0.933$$

النموذج المقيد الأول:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1$$

$$R^2_{y.1} = (0.96)^2 = 0.9216$$

النموذج المقيد الثاني:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X_2$$

$$R^2_{y.2} = (0.5422)^2 = 0.294$$

اختبار ـ F للنموذج التام:

$$F = \frac{R_F^2 \div k}{(1-R_F^2) \div (n-k-1)} = \frac{(0.933) \div 2}{(1-0.933) \div (14-2-1)} = 76.59$$

وبمقارنة قيمة F، مع القيمة الجدولية $F = 3.98$ (عند مستوى المعنوية 5% ودرجات الحرية $dF_1 = 2$ ، $dF_2 = 11$) نخلص إلى أن معامل التحديد للنموذج التام جوهري من الناحية الإحصائية.

ولتقييم جوهرية X_1 من الناحية الإحصائية، علينا تقييم الإنخفاض في قيمة R^2 من النموذج التام إلى النموذج المقيد، والناتج عن حذف X_1 من النموذج:

$$F_1 = \frac{(R_F^2 - R_R^2) \div (K_F - K_R)}{(1 - R_F^2) \div (n - k_F - 1)} = \frac{(R^2_{y.12} - R^2_{y.2}) \div (2-1)}{(1 - R^2_{y.12}) \div (14-2-1)}$$

$$F_1 = \frac{(0.933 - 0.294) \div (2-1)}{(1-0.933) \div (14-2-1)} = 104.91$$

كذلك يمكننا تقييم جوهرية X_2 من الناحية الإحصائية كالآتي:

$$F_2 = \frac{(R^2_{y.12} - R^2_{y.1}) \div (2-1)}{(1-R^2_{y.12}) \div (14-2-1)} = \frac{(0.933 - 0.9216) \div (2-1)}{(1-0.933) \div (14-2-1)} = 1.87$$

وبمقارنة قيم $-F$، مع القيمة الجدولية $F = 4.84$ (عند مستوى المعنوية 5% ودرجات الحرية $dF_1 = 1$ ، $dF_2 = 11$)، نخلص إلى أن X_1 جوهرية من الناحية الإحصائية، وبالتالي فيجب حذف X_2 من النموذج، لأنها لا تساهم جوهرياً في تحديد اختلافات إضافية في Y.*

يتضح من اختبارات $-F$، ومن النماذج التامة والمقيدة، أن قيمة معامل التحديد للنموذج التام، تبقى ثابتة مهما اختلفت تراتيب المتغيرات المستقلة في النموذج. أما الأهمية النسبية للمتغير المستقل فتختلف بإختلاف ترتيب المتغير المستقل في النموذج، فلو أدخلنا X_2 قبل X_1 في النموذج فإنه يساهم في تحديد

---

* من مقارنة نتائج اختبار $-F$ مع نتائج اختبار $-t$ ص: **١٣٥-١٣٦** نخلص إلى أن $F=t^2$ لكل من القيم المحسوبة والقيم الجدولية، كالآتي: $(2.2)^2 = 4.84$ و $(10.24)^2 = 104.91$.

29.4% من الإختلافات الكلية، وهي جوهرية من الناحية الإحصائية. لكن إذا أدخلنا X_2 بعد X_1 في النموذج، فإنه يساهم في تحديد 0.0114 من الإختلافات الكلية، بالرغم من أن قيمة معامل التحديد للنموذج التام تبقى ثابتة في الحالتين $R^2_{y.12} = R^2_{y.21} = 0.933$. ويعود السبب في اختلاف مساهمة المتغير المستقل بإختلاف ترتيبه، إلى وجود علاقة بين المتغيرات المستقلة، علماً أنه إذا كانت العلاقة بين المتغيرات المستقلة تساوي صفراً، $R^2_{12} = 0$ فإن:

$$R^2_{y.12} = R^2_{y1} + R^2_{y2}$$

كذلك، تجدر الإشارة إلى أن الإنخفاض في قيمة معامل التحديد، من النموذج التام إلى النموذج المقيد، يساوي إلى القيمة المربعة لمعامل الإرتباط نصف الجزئي.*

نظراً لأن استخدام الطريقة السابقة للحصول على معاملات الإنحدار الجزئية بالوحدات الخام، تعتبر طريقة تقليدية قديمة، لذلك سيتم الحصول على معاملات الإنحدار الجزئية، لمثالنا السابق باستخدام المصفوفات وباستخدام البواقي.

أ: الحصول على معاملات الإنحدار الجزئية باستخدام المصفوفات للوحدات الخام:

لقد ذكرنا في الفصل الثاني من هذا المؤلف أنه باستطاعة الباحث الحصول على معاملات الإنحدار باستخدام المصفوفات، علماً أن:

$$b = (X'X)^{-1} X'Y$$

إذن:

---

* انظر معامل الإرتباط نصف الجزئي ص: ١٥٤.

$$\underset{X'}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1127 & 484 & 713 & 7375 & 593 & 3128 & 7636 & 243 & 815 & 887 & 16203 & 1578 & 329 & 264 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 1127 & 1 \\ 1 & 484 & 0 \\ 1 & 713 & 0 \\ 1 & 7375 & 1 \\ 1 & 593 & 0 \\ 1 & 3128 & 0 \\ 1 & 7636 & 1 \\ 1 & 243 & 0 \\ 1 & 815 & 0 \\ 1 & 887 & 0 \\ 1 & 16203 & 1 \\ 1 & 1578 & 1 \\ 1 & 329 & 0 \\ 1 & 264 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{X'X}{\begin{bmatrix} 14 & 41375 & 5 \\ 41375 & 391563181 & 33919 \\ 5 & 33919 & 5 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{X'}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1127 & 484 & 713 & 7375 & 593 & 3128 & 7636 & 243 & 815 & 887 & 16203 & 1578 & 329 & 264 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{Y}{\begin{bmatrix} 343 \\ 420 \\ 405 \\ 1520 \\ 260 \\ 1360 \\ 1320 \\ 21 \\ 406 \\ 388 \\ 5100 \\ 743 \\ 26 \\ 106 \end{bmatrix}} = \underset{X'Y}{\begin{bmatrix} 12418 \\ 111100827 \\ 9026 \end{bmatrix}}$$

$$
\overset{(X'X)^{-1}}{\begin{bmatrix} 0.1155308116 & -0.0000053349 & -0.0793396535 \\ -0.0000053349 & 0.0000000064 & -0.0000383507 \\ -0.0793396535 & -0.0000383507 & 0.5395033219 \end{bmatrix}}
\overset{X'Y}{\begin{bmatrix} 12418 \\ 111100827 \\ 9026 \end{bmatrix}}
=
\overset{b}{\begin{bmatrix} 125.83 \\ 0.30 \\ -376.48 \end{bmatrix}}
$$

وهي ذات القيم لمعاملات الإنحدار والتي تمّ الحصول عليها باستخدام الطريقة السابقة. آخذين في الإعتبار أننا لو أخذنا المتغيرات في شكل إنحراف عن الوسط الحسابي (Deviation form) لأمكننا الحصول على b_1 و b_2 بطريقة أسهل، لأن b_0 في هذه الحالة يساوي صفراً كالآتي:

$$\underset{(x'x)^{-1}}{\begin{bmatrix} \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2^2 \end{bmatrix}^{-1}} \underset{x'y}{\begin{bmatrix} \Sigma x_1 y \\ \Sigma x_2 y \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}$$

إذن:

$$\underset{(x'x)^{-1}}{\begin{bmatrix} 0.0000000064 & -0.0000383507 \\ -0.0000383507 & 0.5395033219 \end{bmatrix}} \underset{x'y}{\begin{bmatrix} 74401202 \\ 4591 \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} 0.30 \\ -376.48 \end{bmatrix}}$$

أما b_0 فتساوي:

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \overline{X}_1 - b_2 \overline{X}_2 = 125.83$$

تجدر الإشارة أخيراً، إلى أنه في حالة استخدام المصفوفات للوحدات الخام فإن:

$$S_{b_1}^2 = C_{11} \frac{S\,S_{Resd}}{n-k-1}$$

$$S_{b_1}^2 = (0.0000000064) \frac{1494307.03}{11} = 0.00087$$

$$S_{b_2}^2 = C_{22} \frac{S\,S_{Resd}}{n-k-1}$$

$$S_{b_2}^2 = 0.5395033219 \frac{1494307.03}{11} = 73289.4$$

$$R^2 = \frac{b'(X'Y) - n\overline{Y}^2}{(Y'Y) - n\,\overline{Y}^2} = 93\%$$

وتختلف نتائج الطرق المختلفة عن بعضها قليلاً بسبب أخطاء التقريب (Rounding errors).

ب: الحصول على معاملات الإنحدار الجزئية باستخدام مصفوفة معاملات الإرتباط بين المتغيرات:

تعتبر هذه الطريقة من أفضل وأسهل الطرق المستخدمة في الحصول على معاملات الإنحدار الجزئية، علماً أن:

مصفوفة معاملات الإرتباط بين المتغيرات

	Y	X_1	X_2
Y	1.0000	0.9600	0.5422
X_1	0.9600	1.0000	0.6506
X_2	0.5422	0.6506	1.0000

ويتم في الخطوة الأولى الحصول على مقلوب (inverse) مصفوفة معاملات الإرتباط بين المتغيرات المستقلة كالآتي:

$$R = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.6506 \\ 0.6506 & 1.0000 \end{bmatrix} \rightarrow R^{-1} = \begin{bmatrix} 1.733945 & -1.128105 \\ -1.128105 & 1.733945 \end{bmatrix}$$

ويتم في الخطوة الثانية الحصول على معاملات الإنحدار الجزئية بالوحدات المعيارية كالآتي:

$$\overset{R^{-1}}{\begin{bmatrix} 1.733945 & -1.128105 \\ -1.128105 & 1.733945 \end{bmatrix}} \overset{V}{\begin{bmatrix} 0.9600 \\ 0.5422 \end{bmatrix}} = \overset{\beta}{\begin{bmatrix} 1.05293 \\ -0.14284 \end{bmatrix}}$$

علماً أن:

$$b = \beta \frac{S_y}{S_x}$$

$$b_1 = (1.05293) \frac{1309.82}{4551.29} = 0.303$$

$$b_2 = (-0.14284) \frac{1309.82}{0.4972} = -376.28$$

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \overline{X}_1 - b_2 \overline{X}_2 = 125.83$$

$$R^2_{y.12} = \beta_1 r_{y1} + \beta_2 r_{y2}$$

$$R^2_{y.12} = (1.05293)(0.96) + (-0.14284)(0.5422) = 0.933$$

$$S_b^2 = \frac{\dfrac{S\,S_{Resd}}{n-k-1}}{\Sigma x^2 (1-R_j^2)}$$

$$R_j^2 = 1 - \frac{1}{r^j} = 1 - \frac{1}{1.733945} = 0.42328$$

$$S_{b_1}^2 = \frac{1494307.03 \div (14-2-1)}{269285279.2\,(1-0.42328)} = 0.00087$$

$$S_{b_2}^2 = \frac{1494307.03 \div (14-2-1)}{(3.214286)\ (1-0.42328)} = 73282.05$$

وهي ذات القيم التي حصلنا عليها بالطرق السابقة.

ح: الحصول على معاملات الإنحدار الجزئية باستخدام البواقي (Residuals):

يعتبر تحليل البواقي من أفضل الطرق في تحليل الإنحدار، لأنه يوضح ما يحدث بين المتغيرات في تحليل الإنحدار. فكما ذكرنا سابقاً، فإن معامل الإنحدار الجزئي يقيس معدّل التغير في Y نتيجة تغير X بوحدة قياس واحدة، مع بقاء أثر بقية المتغيرات المستقلة الأخرى ثابتاً.

وبالنسبة لمثالنا السابق، فبإستطاعتنا إذاً حذف تأثير X_2 من X_1، للحصول على ما تبقى من X_1 دون تأثير X_2، ومن ثم نأخذ إنحدار Y على ما تبقى من X_1 (دون تأثير X_2)، فنحصل على معامل الإنحدار الجزئي b_1. وإذا حذفنا أثر X_1 من X_2، وأخذنا إنحدار Y على ما تبقى من X_2 لحصلنا على معامل الإنحدار الجزئي b_2، كما هو مبين في الجداول رقم (4) ، (5)، (6)و (7) :

الجدول رقم (4)

انحدار X_1 على X_2

X_1	X_2	$\hat{X}_1 = 828.44 + 5955.36\ X_2$	$e_1 = X_1 - \hat{X}_1$
1127	1	6783.80	−5656.80
484	0	828.44	−344.44
713	0	828.44	−115.44
7375	1	6783.80	591.20
593	0	828.44	−235.44
3128	0	828.44	2299.56
7636	1	6783.80	852.20
243	0	828.44	−585.44
815	0	828.44	−13.44
887	0	828.44	58.56
16203	1	6783.80	9419.20
1578	1	6783.80	−5205.80
-329	0	828.44	−499.44
264	0	828.44	−564.44
Σ: 41375 **M: 2955.36**	**5** **0.357**		**0.0**

الجدول رقم (5)

إنحدار Y على ما تبقى من X_1 بعد حذف أثر X_2

Y	e_1	$Y.e_1$	e_1^2
343	−5656.80	−1940282.40	31999386.24
420	−344.44	−144664.80	118638.91
405	−115.44	−46753.20	13326.39
1520	591.20	898624.00	349517.44
260	−235.44	−61214.40	55431.99
1360	2299.56	3127401.60	5287976.19
1320	852.20	1124904.00	726244.84
21	−585.44	−12294.24	342739.99
406	−13.44	−5456.64	180.63
388	58.56	22721.28	3429.27
5100	9419.20	48037920.00	88721328.64
743	−5205.80	−3867909.40	27100353.64
26	−499.44	−12985.44	249440.31
106	−564.44	−59830.64	318592.51
Σ: **12418**	**0.0**	**47060179.72**	**155286587**

$$b_1 = \frac{\Sigma Y.e_1}{\Sigma e_1^2} = \frac{47060179.72}{155286587}$$

$$b_1 = 0.303$$

الجدول رقم (6)

إنحدار X_2 على X_1

X_2	X_1	$\hat{X}_2 = 0.14706 + 0.000071\ X_1$	$e_2 = X_2 - \hat{X}_2$
1	1127	0.227170	0.772830
0	484	0.181466	−0.181466
0	713	0.197740	−0.197740
1	7375	0.671310	0.328690
0	593	0.189214	−0.189214
0	3128	0.369420	−0.369420
1	7636	0.689870	0.310132
0	243	0.164330	−0.164330
0	815	0.204995	−0.204995
0	887	0.210110	−0.210110
1	16203	1.298860	−0.298860
1	1578	0.259230	0.740770
0	329	0.170448	−0.170448
0	264	0.165827	−0.165827
Σ: 5	**41375**		**0.0**
M: 0.357	**2955.36**		

الجدول رقم (7)

إنحدار Y على ما تبقى من X_2 بعد حذف أثر X_1

Y	e_2	$Y.e_2$	e_2^2
343	0.772830	265.08069	0.59727
420	−0.181466	−76.21572	0.03293
405	−0.197740	−80.08470	0.03910
1520	0.328690	499.60880	0.10804
260	−0.189214	−49.19564	0.03580
1360	−0.369420	−502.41120	0.13647
1320	0.310132	409.37420	0.09618
21	−0.164330	−3.45093	0.02700
406	−0.204995	−83.22797	0.04202
388	−0.210110	−81.52268	0.04415
5100	−0.298860	−1524.18600	0.08932
743	0.740770	550.39211	0.54874
26	−0.170448	−4.43165	0.02905
106	−0.165827	−17.57766	0.02749
Σ: 12418	**0.0**	**−697.848**	**1.85357**

$$b_2 = \frac{\Sigma ye_2}{\Sigma e_2^2} = -\ 376.48$$

معاملات الإرتباط الجزئية لمثال اختلاف معدلات استهلاك الطاقة الكهربائية :

لقد ذكرنا سابقاً، أن معامل الإرتباط الجزئي يقيس العلاقة الحقيقية الصافية (The net correlation)، بين المتغير التابع والمتغير المستقل، بعد حذف التأثير المشترك (The common influence) للمتغيرات المستقلة الأخرى من النموذج. وبالعودة إلى المثال (2)، فإنه يمكننا إيجاد العلاقة الحقيقية بين الناتج المحلي الإجمالي للفرد الواحد X_1، واستهلاك الفرد للكهرباء Y مع تثبيت أثر X_2 كالآتي:

$$r_{y1.2} = \frac{r_{y1} - r_{y2} r_{12}}{\sqrt{1-(r_{y2})^2}\,\sqrt{1-(r_{12})^2}}$$

$$r_{y1.2} = \frac{(0.96) - (0.5422)\,(0.6506)}{\sqrt{1-(0.5422)^2}\,\sqrt{1-(0.6506)^2}} = 0.95165$$

أما العلاقة الحقيقية بين X_2 و Y مع تثبيت أثر X_1 فهي :

$$r_{y2.1} = \frac{r_{y2} - r_{y1}\, r_{21}}{\sqrt{1-(r_{y1})^2}\,\sqrt{1-(r_{21})^2}}$$

$$r_{y2.1} = \frac{0.5422 - (0.96)\,(0.6506)}{\sqrt{1-(0.96)^2}\,\sqrt{1-(0.6506)^2}} = -0.3874$$

الجدير بالذكر، أن الإشارة الجبرية لمعامل الإرتباط الجزئي، تكون مماثلة للإشارة الجبرية لمعامل الإنحدار الجزئي. فإذا كانت b_2 سالبة، فإن $r_{y2.1}$ تكون سالبة أيضاً. علماً أن قيمة معامل الإرتباط الجزئي تختلف عن قيمة معامل الإرتباط البسيط بسبب وجود العلاقة بين المتغيرات المستقلة. كذلك نلاحظ في مثالنا السابق أن قيمة $r_{y1.2}$ أكبر من قيمة $r_{y2.1}$، مما يدل على أن الأهمية النسبية (The relative importance) للمتغير المستقل X_1، أكبر من الأهمية النسبية

للمتغير المستقل X_2، في تحديد الإختلافات الكلية للمتغير التابع Y.

وتجدر الإشارة أخيراً، إلى أنه يمكننا الحصول على معامل الإرتباط الجزئي بين المتغيرات عن طريق استخدام البواقي. فإذا أردنا الحصول على $r_{y2.1}$، فعلينا عندئذٍ الحصول على ما تبقى من X_2 بعد حذف أثر X_1 (انظر الجدول رقم — 6 —)، ثم الحصول على ما تبقى من Y بعد حذف أثر X_1 (انظر الجدول رقم — 8 —)، ثم علينا إيجاد معامل الإرتباط البسيط بين ما تبقى من Y وما تبقى من X_2 بعد حذف أثر X_1، كما هو مبين في الجدول رقم (9):

الجدول رقم (8)

الحصول على ما تبقى من Y بعد حذف أثر X_1

Y	X_1	$\hat{Y} = 70.46 + 0.2763 X_1$	$e_3 = Y - \hat{Y}$
343	1127	381.84068	−38.84068
420	484	204.18532	215.81468
405	713	267.45605	137.54395
1520	7375	2108.10923	−588.10923
260	593	234.30108	25.69892
1360	3128	934.69973	425.30027
1320	7636	2180.22129	−860.22128
21	243	137.59910	−116.59910
406	815	295.63777	110.36223
388	887	315.53075	72.46925
5100	16203	4547.34890	552.65110
743	1578	506.44809	236.55191
26	329	161.36016	−135.36015
106	264	143.40320	−37.40320
Σ: 12418	**41375**		**0.0**

الجدول رقم (9)

إيجاد العلاقة بين ما تبقى من Y و X_2 بعد حذف أثر X_1

e_3	e_2	e_3^2	e_2^2	e_3e_2
−38.84068	0.772830	1508.598	0.59727	−30.01724
215.81468	−0.181466	46575.976	0.03293	−39.16303
137.54395	−0.197740	18918.338	0.03910	−27.19794
−588.10923	0.328690	345872.466	0.10804	−193.30562
25.69892	−0.189214	660.435	0.03580	−4.86260
425.30027	−0.369420	180880.320	0.13647	−157.11443
−860.22128	0.310132	739980.651	0.09618	−266.78215
−116.59910	−0.164330	13595.350	0.02700	19.16073
110.36223	−0.204995	12179.822	0.04202	−22.62371
72.46925	−0.210110	5251.792	0.04415	−15.22651
552.65110	−0.298860	305423.238	0.08932	−165.16531
236.55191	0.740770	55956.806	0.54874	175.23056
−135.36015	−0.170448	18322.370	0.02905	23.07187
−37.40320	−0.165827	1398.999	0.02750	6.20246
Σ: 0.0	**0.0**	**1746525.16**	**1.85357**	**−697.79292**

$$re_3e_2 = \frac{\Sigma\ e_3e_2}{\sqrt{\Sigma e_3^2\ \Sigma e_2^2}} = \frac{-697.79292}{\sqrt{(1746525.16)\ (1.85357)}} = -0.387$$

$$re_3e_2 = r_{y2.1} = -0.387$$

معاملات الإرتباط نصف الجزئية لمثال اختلاف معدلات استهلاك الطاقة الكهربائية :

كما ذكرنا سابقاً، فإن معاملات الإرتباط نصف الجزئية، تعتبر من أهم معاملات الإرتباط المستخدمة في الإنحدار المتعدد، لأنها تُستخدم في تقييم الأهمية النسبية للمتغير المستقل في تنبؤ المتغير التابع. علماً أن الإختلاف الأساسي بين معاملات الإرتباط الجزئية، ومعاملات الإرتباط نصف الجزئية، هو أنه في الحالة الأولى، نستبعد أثر المتغيرات المستقلة الأخرى من المتغيرين المستقل والتابع معاً، في حين نستبعد أثر المتغيرات المستقلة الأخرى من المتغير المستقل فقط في حالة الإرتباط نصف الجزئي. وبالنسبة لمثالنا عن إستهلاك الكهرباء فإن:

$$r_{y(1.2)} = \frac{r_{y1} - r_{y2}\, r_{12}}{\sqrt{1 - r_{12}^2}}$$

$$r_{y(1.2)} = \frac{0.96 - (0.5422)(0.6506)}{\sqrt{1 - (0.6506)^2}} = 0.79962$$

وبتربيع هذه القيمة نحصل على الأهمية النسبية للمتغير X_1 في تحديد تباين Y :

$$r^2_{y(1.2)} = (0.79962)^2 = 0.6394$$

وهي ذات القيمة التي حصلنا عليها في اختبار -F الإحصائي، لإنخفاض قيمة معامل التحديد المتعدد من النموذج التام إلى النموذج المقيد:*

$$R_F^2 - R_R^2 = R^2_{y.12} - R^2_{y.2} = 0.933 - (0.5422)^2 = 0.639$$

علماً أنه يمكننا الحصول على نفس النتيجة باستخدام البواقي، كالآتي:

$$r_{y(1.2)} = \frac{\Sigma\ e_1 y}{\sqrt{\Sigma\ e_1^2\ \Sigma\ y^2}}$$

---

* انظر اختبار - F_1 ص ١٣٧.

$$r_{y(1.2)} = \frac{47060179.72}{\sqrt{(155286587)\ (22303090)}} = 0.79966$$

وبنفس الطريقة يمكننا تقييم الأهمية النسبية للمتغير X_2.

مثال (3) : استخدام مكتبة الكمبيوتر SPSS في إجراء العمليات الحسابية اللازمة لتحليل الإنحدار المتعدد:

يتميز هذا المثال باستخدام مكتبة الكمبيوتر (The Statistical Package for The Social Science) في إجراء العمليات الحسابية اللازمة لتحليل الإنحدار المتعدد. لكن الهدف الأساسي، هو إعطاء القارىء تمريناً عاماً لما ورد معنا في تحليل الإنحدار المتعدد. لذلك سنقدم تفسيراً مفصلاً لما ورد في نتائج الكمبيوتر من حيث كيفية الحصول وتفسير كل قيمة وردت في الـ (Printout).

يبين الجدول رقم (10) بيانات فرضية عن الكمية المطلوبة من إحدى السلع Y، سعر السلعة X_1، دخل المستهلك X_2 وسعر السلعة البديلة X_3 خلال الفترة الزمنية (1970-1984). والمطلوب هو تقييم الأهمية النسبية للمتغيرات المستقلة في تحديد تباين المتغير التابع. أما الجدول رقم (11) فيبين نتائج الكمبيوتر للمثال الفرضي أعلاه.

الجدول رقم (10)

الكمية المطلوبة Y ، سعر السلعة X_1، دخل المستهلك X_2 وسعر السلعة البديلة X_3

Y	X_1	X_2	X_3
30	14	500	15
35	13	600	19
40	14	700	17
45	13	800	18
50	12	900	16
60	11	1000	20
55	11	1100	21
55	13	1200	22
65	10	1300	27
65	10	1400	24
70	10	1500	25
90	8	1600	28
80	9	1700	23
85	8	1800	29
75	9	1900	26
M: 60	**11**	**1200**	**22**
S: 18.1265	**2.0702**	**447.2136**	**4.4721**

الجدول رقم (11)

نتائج الكمبيوتر للمثال (3)

```
SPSS BATCH SYSTEM                                                                    26/11/86        PAGE    1

SPSS FOR DOS/360, VERSION H, RELEASE 8.0, NOVEMBER 1, 1979


DEFAULT SPACE ALLOCATION..      ALLOWS FOR..    189 TRANSFORMATIONS
WORKSPACE    132720 BYTES                       758 RECODE VALUES + LAG VARIABLES
TRANSPACE     18960 BYTES                      3036 IF/COMPUTE OPERATIONS

                 1 RUN NAME        CHARBAGI RUN FOR THE DEMAND REGRESSION
                 2 FILE NAME       MULTRG
                 3 VARIABLE LIST   Y,X1,X2,X3
                 4 VAR LABELS      Y QUANTITY DEMANDED FOF A COMMODITY
                 5                 X1 ITS PRICE
                 6                 X2 CONSUMERS INCOME
                 7                 X3 THE PRICE OF A SUBSTITUTE
                 8 INPUT FORMAT    FIXED (2F2.0,F4.0,F2.0)

                  ACCORDING TO YOUR INPUT FORMAT, VARIABLES ARE TO BE READ AS FOLLOWS

                  VARIABLE  FORMAT  RECORD    COLUMNS

                  Y         F 2. 0       1     1-   2
                  X1        F 2. 0       1     3-   4
                  X2        F 4. 0       1     5-   8
                  X3        F 2. 0       1     9-  10

THE INPUT FORMAT PROVIDES FOR    4 VARIABLES.    4 WILL BE READ
IT PROVIDES FOR  1 RECORDS ('CARDS') PER CASE.  A MAXIMUM OF   10 'COLUMNS' ARE USED ON A RECORD.

                 9 INPUT MEDIUM    CARD
                10 N OF CASES      15
                11 REGRESSION      VARIABLES=Y,X1,X2,X3/
                12                 REGRESSION=Y WITH X1 TO X3 (2) RESID=0/
                13 OPTIONS         11,12
                14 STATISTICS      ALL
```

CHARBAGI RUN FOR THE DEMAND REGRESSION

FILE MULTRG (CREATION DATE = 26/11/84)

VARIABLE	MEAN	STANDARD DEV	CASES
Y	60.0000	18.1265	15
X1	11.0000	2.0702	15
X2	1200.0000	447.2136	15
X3	22.0000	4.4721	15

CHARBAGI RUN FOR THE DEMAND REGRESSION

FILE MULTRG (CREATION DATE = 26/11/84)

CORRELATION COEFFICIENTS

A VALUE OF 99.00000 IS PRINTED
IF A COEFFICIENT CANNOT BE COMPUTED.

	Y	X1	X2	X3
Y	1.00000	-0.96125	0.94722	0.88995
X1	-0.96125	1.00000	-0.91810	-0.88724
X2	0.94722	-0.91810	1.00000	0.88571
X3	0.88995	-0.88724	0.88571	1.00000

FILE MULTRG (CREATION DATE = 26/11/84)

* M U L T I P L E R E G R E S S I O N * * * * * * * * * * * * * * VARIABLE LIST 1
REGRESSION LIST 1

DEPENDENT VARIABLE.. Y QUANTITY DEMANDED FOF A COMMODITY

VARIABLE(S) ENTERED ON STEP NUMBER 1.. X3
X1
X2

MULTIPLE R	0.97518
R SQUARE	0.95098
ADJUSTED R SQUARE	0.93761
STANDARD ERROR	4.52761

ANALYSIS OF VARIANCE	DF	SUM OF SQUARES	MEAN SQUARE	F
REGRESSION	3.	4374.50821	1458.16940	71.13280
RESIDUAL	11.	225.49179	20.49925	

------------------ VARIABLES IN THE EQUATION ------------------

VARIABLE	B	BETA	STD ERROR B	F
X3	0.1747977	0.04313	0.63672	0.075
X1	-4.928058	-0.56282	1.61108	9.357
X2	0.15900400-01	0.39229	0.00741	4.604
(CONSTANT)	91.28260			

------------------ VARIABLES NOT IN THE EQUATION ------------------

VARIABLE	BETA IN	PARTIAL	TOLERANCE	F

ALL VARIABLES ARE IN THE EQUATION

STATISTICS WHICH CANNOT BE COMPUTED ARE PRINTED AS ALL NINES.

CHARBAGI RUN FOR THE DEMAND REGRESSION 26/11/84 PAGE 5

FILE MULTRG (CREATION DATE = 26/11/84)

* M U L T I P L E R E G R E S S I O N * * * * * * * * * * * * * * VARIABLE LIST 1
REGRESSION LIST 1

DEPENDENT VARIABLE.. Y QUANTITY DEMANDED FOF A COMMODITY

SUMMARY TABLE

VARIABLE	MULTIPLE R	R SQUARE	RSQ CHANGE	SIMPLE R	B	BETA
X3	0.88995	0.79200	0.79200	0.88995	0.1747977	0.04313
X1	0.96461	0.93047	0.13846	-0.96125	-4.928058	-0.56282
X2	0.97518	0.95098	0.02051	0.94722	0.15900400D-01	0.39229
(CONSTANT)					91.28260	

CHARBAGI RUN FOR THE DEMAND REGRESSION 10/01/85 PAGE 7

FILE MULTRG (CREATION DATE = 10/01/85)

* M U L T I P L E R E G R E S S I O N * * * * * * * * * * * * * * * * * *

DEPENDENT VARIABLE Y FROM VARIABLE LIST 1
REGRESSION LIST 1

SEQNUM	OBSERVED Y	PREDICTED Y	RESIDUAL	PLOT OF STANDARDIZED RESIDUAL -2.0 -1.0 0.0 1.0 2.0
1	30.00000	32.86195	-2.861960	* I
2	35.00000	40.07925	-5.079248	* I
3	40.00000	36.39163	3.608363	I *
4	45.00000	43.08452	1.915467	I*
5	50.00000	49.25302	0.7469649	*
6	60.00000	56.47032	3.529675	I *
7	55.00000	58.23515	-3.235162	* I
8	55.00000	50.14383	4.856114	I *
9	65.00000	67.39207	-2.392086	*I
10	65.00000	68.45772	-3.457733	* I
11	70.00000	70.22255	-0.2225719	*
12	90.00000	82.19313	7.806879	I *
13	80.00000	77.98111	2.018885	I*
14	85.00000	85.54799	-0.5479991	*
15	75.00000	81.68553	-6.685589	* I

DURBIN-WATSON TEST OF RESIDUAL DIFFERENCES COMPARED BY CASE ORDER (SEQNUM).

VARIABLE LIST 1, REGRESSION LIST 1. DURBIN-WATSON TEST 1.81810

لا شك أن أفضل طريقة تمكننا من إيضاح كيفية الحصول على القيم الواردة في نتائج الكمبيوتر وتفسيرها تتم بتقديم الحل المفصل لتحليل الإنحدار المتعدد لمثالنا الفرضي أعلاه. علماً أنه يمكننا تقييم الأهمية النسبية للمتغيرات المستقلة في تحديد (تفسير) الإختلافات الكلية للمتغير التابع بإتباع الخطوات الآتية:

أولاً: الحصول على مصفوفة معاملات الإرتباط بين المتغيرات:

مصفوفة معاملات الإرتباط بين متغيرات الجدول رقم (10)

	Y	X_1	X_2	X_3
Y	1.00000	−0.96125	0.94722	0.88995
X_1	−0.96125	1.00000	−0.91811	−0.88724
X_2	0.94722	−0.91811	1.00000	0.88571
X_3	0.88995	−0.88724	0.88571	1.00000

ثانياً: الحصول على معاملات الإرتباط الجزئية:

لقد سبق وذكرنا أن الهدف الأساسي من الحصول على معاملات الإرتباط الجزئية، هو معرفة فيما إذا كانت العلاقات بين المتغيرات الإقتصادية، علاقاتٍ حقيقية أم زائفة. فعلى سبيل المثال، قد تكون العلاقة $r_{y3} = 0.88995$ ، زائفة، وناتجة عن تأثير المتغيرات الأخرى (X_1 و X_2) على كلٍ من Y و X_3 ، وما أن نُدخل الرقابة الإحصائية حتى تنعدم العلاقة الظاهرية بين Y و X_3 . إضافةً إلى ذلك، فإن معاملات الإرتباط الجزئية تُعتبر من أهم الوسائل الإحصائية المستخدمة في تقييم الأهمية النسبية للمتغير المستقل

بعد حذف تأثير المتغيرات المستقلة الأُخرى. حيث تجدر الإشارة هنا إلى الصلة الوثيقة بين معامل الإرتباط الجزئي (والمستخدم في الرقابة الإحصائية)، وبين معامل الارتباط نصف الجزئي (والمستخدم في تقييم الأهمية النسبية للمتغير المستقل في تفسير إختلافات المتغير التابع). فمن مقارنة صيغة معامل الإرتباط نصف الجزئي:

$$r_{y(1.2)} = \frac{r_{y1} - r_{y2}\, r_{12}}{\sqrt{1 - r_{12}^2}}$$

مع صيغة معامل الإرتباط الجزئي:

$$r_{y1.2} = \frac{r_{y1} - r_{y2}\, r_{12}}{\sqrt{1 - r_{y2}^2}\ \sqrt{1 - r_{12}^2}}$$

نخلص إلى أن:

$$r_{y1.2}^2 = \frac{r_{y(1.2)}^2}{1 - r_{y2}^2} = \frac{R_{y.12}^2 - R_{y.2}^2}{1 - R_{y.2}^2}$$

بمعنى أن القيمة المربعة لمعامل الإرتباط نصف الجزئي تقيس الزيادة **المطلقة** في قيمة معامل التحديد والناتجة عن إضافة المتغير المستقل X_1 إلى معادلة الإنحدار التي تتضمن أساساً المتغير المستقل X_2. في حين أن القيمة المربعة لمعامل الإرتباط الجزئي تقيس الزيادة **النسبية** في قيمة معامل التحديد والناتجة عن إضافة X_1 إلى معادلة الإنحدار التي تتضمن أساساً المتغير X_2. وبمعنى أدق فإن $r_{y1.2}^2$ تقيس مساهمة X_1 في تفسير إختلافات إضافية في Y، مُعبرٌ عنها كنسبة من الاختلافات التي لم تُفسر أساساً بالمتغير X_2. أي أن X_1 تقيس نسبة الإنخفاض في قيمة الإختلافات الغير مُفسرة في Y.

أما بالنسبة لمثالنا عن الكمية المطلوبة، فيمكننا إيجاد معاملات الإرتباط الجزئية (وبالاعتماد على مصفوفة معاملات الإرتباط بين المتغيرات)، كالآتي:

$$r_{y1.23} = \frac{r_{y1.2} - r_{y3.2}\ r_{31.2}}{\sqrt{1 - r^2_{y3.2}}\ \sqrt{1 - r^2_{31.2}}}$$

$$r_{y1.2} = \frac{r_{y1} - r_{y2}\ r_{12}}{\sqrt{1 - r^2_{y2}}\ \sqrt{1 - r^2_{12}}}$$

$$r_{y1.2} = \frac{-0.96125 - (0.94722)\ (-0.91811)}{\sqrt{1 - (0.94722)^2}\ \ \sqrt{1 - (-0.91811)^2}} = -0.7209425$$

$$r_{y3.2} = \frac{r_{y3} - r_{y2}\ \ r_{32}}{\sqrt{1 - r^2_{y2}}\ \sqrt{1 - r^2_{32}}}$$

$$r_{y3.2} = \frac{0.88995 - (0.94722)\ (0.88571)}{\sqrt{1 - (0.94722)^2}\ \ \sqrt{1 - (0.88571)^2}} = 0.3425959923$$

$$r_{31.2} = \frac{r_{31} - r_{32}\ \ r_{12}}{\sqrt{1 - r^2_{32}}\ \sqrt{1 - r^2_{12}}}$$

$$r_{31.2} = \frac{-0.88724 - (0.88571)\ (-0.91811)}{\sqrt{1 - (0.88571)^2}\ \sqrt{1 - (-0.91811)^2}} = -0.4025389128$$

$$r_{y1.23} = \frac{-0.7209425 - (0.3425959923)\ (-0.4025389128)}{\sqrt{1 - (0.3425959923)^2}\ \sqrt{1 - (-0.4025389128)^2}}$$

$$r_{y1.23} = r_{y1.32} = -0.67794268$$

علماً أنه يمكننا الحصول على $r_{y1.23}$ باستخدام معاملات التحديد كطريقةٍ بديلةٍ، كالآتي:

$$r^2_{y1.23} = \frac{R^2_{y.123} - R^2_{y.23}}{1 - R^2_{y.23}}$$

$$r^2_{y1.23} = \frac{0.956 - 0.9092751258}{1 - 0.9092751258} = 46\%$$

$$r_{y1.23} = \sqrt{0.46} \approx 0.6779$$

آخذين في الإعتبار أن الإشارة الجبرية لمعامل الارتباط الجزئي $r_{y1.23}$ تكون شبيهة بالاشارة الجبرية لمعامل الإنحدار الجزئي $b_{y1.23}$. كما وأن تراتيب المتغيرات الرقابية لا يؤثر على قيمة معامل الارتباط الجزئي، بمعنى أن $r_{y1.23}=r_{y1.32}$، ذلك لأن معامل الارتباط الجزئي $r_{y1.23}$ لا يعدو عن كونه معامل للارتباط البسيط بين ما تبقى من Y وما تبقى من X_1 بعد حذف تأثير المتغيرات الرقابية X_2 و X_3.

وبإتباع نفس الاسلوب السابق نحصل على: *

$$r_{y2.13} = 0.5678459044$$

$$r_{y3.12} = 0.0825837$$

ومن مقارنة معاملات الإرتباط الجزئية نلاحظ أن

$$r_{y1.23} > r_{y2.13} > r_{y3.12}$$

لذلك يتوجب إدخال المتغير X_1 قبل غيره في معادلة الإنحدار، ثم نُدخل X_2 ثم X_3، فيصبح نموذج الإنحدار المتعدد، كالآتي:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3$$

* تجدر الإشارة إلى أن معامل الارتباط البسيط $r_{y3} = 0.8899$ ، قد انخفض بشكل كبير إلى 0.08 $r_{y3.12}$ نتيجة إدخال الرقابة الإحصائية، علماً أن إدخال الرقابة الاحصائية يمكن الباحث من الحصول على العلاقة الحقيقية بين متغيرين أو أكثر.

ثالثاً: الحصول على معاملات الإنحدار الجزئية بالوحدات المعيارية:

$$R^{-1} * V = \beta$$

حيث أن R^{-1} هي مقلوب مصفوفة معاملات الإرتباط بين المتغيرات المستقلة، و V هو الموجه الذي يتضمن معاملات الارتباط بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة، أما β فهو الموجه الذي يتضمن معاملات الإنحدار بالوحدات المعيارية. علماً أن مصفوفة معاملات الإرتباط بين المتغيرات المستقلة هي كالآتي:

مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات المستقلة

$$R = \begin{bmatrix} 1.00000 & -0.91811 & -0.88724 \\ -0.91811 & 1.00000 & 0.88571 \\ -0.88724 & 0.88571 & 1.00000 \end{bmatrix}$$

ويمكننا الحصول على مقلوب المصفوفة R^{-1} بإتباع الخطوات الآتية:

أ) نستبدل كل عنصر (Element) في المصفوفة R بمرافق العنصر (Cofactor)، علماً أن مُرافق العنصر هو عبارة عن المحيدد مع الأخذ في الاعتبار الاشارة الجبرية لموقع ذلك العنصر (Singned minor). أما الاشارة الجبرية للعنصر فتتحدد بجمع رقم الصف مع رقم العمود الذي يقع فيه العنصر، فإذا كان حاصل الجمع فردياً كانت الاشارة سالبة، لذلك تكون إشارة العنصر a_{32} سالبة، في حين تكون إشارة العنصر a_{22} موجبة.

$$
A^* = \begin{bmatrix}
+\begin{vmatrix} 1.00000 & 0.88571 \\ 0.88571 & 1.00000 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -0.91811 & 0.88571 \\ -0.88724 & 1.00000 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -0.91811 & 1.00000 \\ -0.88724 & 0.88571 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} -0.91811 & -0.88724 \\ 0.88571 & 1.000000 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1.00000 & -0.88724 \\ -0.88724 & 1.00000 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1.00000 & -0.91811 \\ -0.88724 & 0.88571 \end{vmatrix} \\
+\begin{vmatrix} -0.91811 & -0.88724 \\ 1.00000 & 0.88571 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1.00000 & -0.88724 \\ -0.91811 & 0.88571 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1.00000 & -0.91811 \\ -0.91811 & 1.00000 \end{vmatrix}
\end{bmatrix}
$$

ت) نحصل على المحدد (Determinant) للمصفوفة R:

$$\triangle = (1.0)\,[\,(1.0)^2 - (0.88571)^2\,] - (-0.91811)[\,(-0.91811)\,(1.0) - (0.88571)\,(-0.88724)\,]$$

$$+ (-0.88724)\,[\,(-0.91811)\,(0.88571) - (1.0)\,(-0.88724)\,] = 0.0283672474$$

ح) نقسم المصفوفة المحورة $A^{*\prime}$ (Transpose) على المحدد Δ فنحصل على مقلوب مصفوفة معاملات الارتباط R^{-1}.

لقد تم الحصول على مقلوب مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات المستقلة وأصبح بإمكاننا الحصول على معاملات الانحدار الجزئية بالوحدات المعيارية $R^{-1} * V = \beta$ كما هو مبين على الصفحة التالية. علماً أنه يمكننا بسهولة الانتقال من معاملات الانحدار الجزئية بالوحدات المعيارية إلى معاملات الانحدار الجزئية بالوحدات الخام، كالآتي:

$$b = \beta \frac{S_y}{S_x}$$

$$b_1 = (-0.56282) \frac{18.1265}{2.0702} = -4.928$$

$$b_2 = (0.39229) \frac{18.1265}{447.2136} = 0.0159$$

$$b_3 = (0.04317) \frac{18.1265}{4.4721} = 0.17498$$

$$b_0 = 60 - (-4.928)\ (11) - (0.0159)\ (1200) - (0.17498)\ (22)$$

$$b_0 = 91.27844$$

$$
\underset{R^{-1}}{\begin{bmatrix} 7.597062355 & 4.662471854 & 2.610819658 \\ 4.662471854 & 7.501441973 & -2.507370642 \\ 2.610819658 & -2.507370642 & 5.537226884 \end{bmatrix}} * \underset{V}{\begin{bmatrix} -0.96125 \\ 0.94722 \\ 0.88995 \end{bmatrix}} = \underset{\beta}{\begin{bmatrix} -0.56282 \\ 0.39229 \\ 0.04313 \end{bmatrix}}
$$

$$\hat{Z_y} = -0.56282\ Z_{X_1} + 0.39229\ Z_{X_2} + 0.04313\ Z_{X_3}$$

$$\hat{Y} = 91.27844 - 4.928\ X_1 + 0.0159\ X_2 + 0.17498\ X_3$$

وهي ذات القيم لمعاملات الإنحدار الجزئية والمبينة على الصفحة الرابعة من نتائج الكمبيوتر.

ويمكن تفسير معاملات الانحدار الجزئية، بالوحدات المعيارية، على أن تغير سعر السلعة X_1، بانحراف معياري واحد سوف يُحدث أكبر تغير في الكمية المطلوبة من السلعة، في حين أن تغير سعر السلعة البديلة X_3، بانحراف معياري واحد، سيؤدي إلى أقل تغير في الكمية المطلوبة، مفترضين في ذلك ثبات (حذف) تأثير بقية المتغيرات (Ceteris paribus).

أما معاملات الانحدار الجزئية بالوحدات الخام، فكلٍ منها يقيس تأثير المتغير المستقل على الكمية المطلوبة بعد حذف تأثير بقية المتغيرات المستقلة. فعلى سبيل المثال، يمكننا تفسير $b_{y1.32} = -4.928$ على أنه إذا تغير (المتغير المستقل) سعر السلعة X_1، بوحدة قياس واحدة، فإن الكمية المطلوبة من السلعة ستتغير في الاتجاه المعاكس بقيمة 4.928 من وحدة قياس المتغير التابع، مع بقاء تأثير بقية المتغيرات المستقلة الأخرى ثابتاً. علماً أن المقصود بتثبيت أثر بقية المتغيرات هو حذف تأثير بقية المتغيرات إحصائياً. فلو أخذنا X_1 دالة في X_2 و X_3، ثم أخذنا Y دالة في المتبقي من X_1 بدون تفسير عن طريق X_2 و X_3 لحصلنا على $b_{ye_1} = b_{y1.23}$.

الجدير بالذكر، أنه غالباً ما يُقاس المتغير التابع Y بوحدات قياس مختلفة عن الوحدات التي يُقاس بها المتغير المستقل، لذلك فإن معامل الانحدار الجزئي بالوحدات المعيارية يكون أفضل من معامل الانحدار الجزئي بالوحدات الخام. كذلك تجدر الاشارة إلى أن تراتيب المتغيرات المستقلة في معادلة الانحدار لا يؤثر على قيم معاملات الانحدار الجزئية، فعلى سبيل المثال، نلاحظ أن النموذجين:

$$\hat{Y} = b_0 + b_{y1.23}\, X_1 + b_{y2.13}\, X_2 + b_{y3.12}\, X_3$$

$$\hat{Y} = b_0 + b_{y3.12}\, X_3 + b_{y1.23}\, X_1 + b_{y2.13}\, X_2$$

يعطيان نفس القيم لمعاملات الانحدار الجزئية، بمعنى أن قيم معاملات الانحدار الجزئية لا تتأثر بإدخال X_1 أو غيرها في بداية أو في نهاية معادلة

الانحدار، ذلك لأن احتساب معاملات الانحدار الجزئية يتم عن طريق استخدام البواقي (Residuals). كما وتجدر الاشارة إلى أن تراتيب المتغيرات المستقلة لا تؤثر على قيمة معامل التحديد للنموذج التام، وإنما تؤثر في تقييم الأهمية النسبية للمتغير المستقل في تحديد تباين المتغير التابع. فإذا أدخلنا X_1 في بداية معادلة الانحدار، فإن X_1 سيحدد من اختلافات Y نسبةً اكبر من التي يحددها فيما لو أُدخل المتغير X_1 في نهاية معادلة الانحدار.

رابعاً: احتساب المرونة:

أ) المرونة السعرية للطلب:

وتقيس التغير النسبي في الطلب نتيجة التغير النسبي في السعر.

$$\eta_{x_1} = b_1 \cdot \frac{\overline{X}_1}{\overline{Y}}$$

$$\eta_{x_1} = -4.928 \frac{11}{60} \approx -0.90$$

وتشير الاشارة السالبة إلى العلاقة العكسية بين الكمية المطلوبة من السلعة وسعر السلعة. في حين تشير القيمة 0.90 إلى أن المرونة قريبة من المرونة المتكافئة. فارتفاع الثمن بنسبة 10% يخفض الطلب بنسبة 9%.

ب) المرونة الدخلية:

وتقيس التغير النسبي في الطلب نتيجة التغير النسبي في الدخل.

$$\eta_{x_2} = b_2 \frac{\overline{X}_2}{\overline{Y}}$$

$$\eta_{x_2} = 0.0159 \frac{1200}{60} = 0.318$$

وتشير القيمة أعلاه إلى أن مرونة الدخل موجبة لكنها ضعيفة.

جـ) مرونة التقاطع:

وتقيس مرونة التقاطع (Cross-effect) التغير النسبي في الطلب نتيجة التغير النسبي في سعر السلعة البديلة أو المتممة.

$$\eta_{x_3} = b_3 \frac{\overline{X_3}}{\overline{Y}}$$

$$\eta_{x_3} = 0.17498 \frac{22}{60} = 0.064$$

وتشير الاشارة الجبرية لمرونة التقاطع إلى كون السلعة بديلة، في حين تشير القيمة الصغيرة للمرونة إلى أن المرونة ضعيفة جداً.

خامساً: اختبار جوهرية معامل التحديد للنموذج التام:

يقيس معامل التحديد المتعدد، للنموذج التام، نسبة الاختلافات المفسرة إلى الاختلافات الكلية في الكمية المطلوبة من السلعة، والمحددة باختلافات المتغيرات المستقلة: سعر السلعة، دخل المستهلك وسعر السلعة البديلة. ويمكن ايجاد معامل التحديد المتعدد كالآتي:

$$R_F^2 = R_{y.123}^2 = \beta_1 \; r_{y1} + \beta_2 \; r_{y2} + \beta_3 \; r_{y3}$$

$$R_F^2 = (-0.56282)\,(-0.96125) + (0.39229)\,(0.94722) + (0.04313)\,(0.88995)$$

$$R_F^2 = 0.9510$$

بمعنى أن المتغيرات المستقلة X_1، X_2 و X_3 حددت معاً 95.10٪ من الاختلافات الكلية في الكمية المطلوبة من السلعة. أما معامل الارتباط المتعدد

$R_{y.123} = \sqrt{R^2_{y.123}} = 0.97518$، فيشير إلى وجود علاقة خطية قوية بين Y والمتغيرات المستقلة في مثالنا أعلاه. ونظراً لأن إضافة أي متغير مستقل إلى معادلة الانحدار، يؤدي إلى تخفيض درجات الحرية وبالتالي يرفع من قيمة معامل التحديد المتعدد لذلك يتوجب علينا الحصول على معامل التحديد المعدَّل (Adjusted $\overline{R}^2$)، إذن:

$$\overline{R}^2 = 1 - [(1-R_F^2)\ \frac{n-1}{n-k-1}]$$

$$\overline{R}^2 = 1 - [(1-0.9510)\ \frac{15-1}{15-3-1}] = 0.9376$$

وهي ذات القيم المبينة على الصفحة الرابعة من نتائج الكمبيوتر. علماً أن:

$$SS_T = \Sigma y^2 = 4600$$

$$SS_{Reg} = \Sigma y^2\ (R_F^2) = 4600\ (0.9510) = 4374.60$$

$$SS_{Resd} = \Sigma y^2\ (1-R_F^2) = 4600\ (1-0.9510) = 225.40$$

أما الخطأ المعياري للتقدير فيساوي:

$$SE_{est} = \sqrt{\frac{SS_{Resd}}{n-k-1}} = \sqrt{\frac{225.40}{15-3-1}} = 4.527$$

ويمكن تفسير الخطأ المعياري للتقدير على أنه الانحراف المعياري للبواقي والذي يقيس دقة توقعات النموذج بالوحدات المطلقة، بمعنى أن الكمية المطلوبة المتوقعة $\hat{Y}$ ستختلف في المعدل (on the average) عن الكمية الحقيقية Y بمقدار 4.527 وحدة من وحدات قياس الكمية المطلوبة. الجدير بالذكر، أنه كلما كان الخطأ المعياري للتقدير صغيراً إذا ما قورن بالانحراف المعياري للمتغير التابع، كلما دلَّ ذلك على دقة التوقع. ونظراً لأن الخطأ المعياري للتقدير $SS_{est} = 4.527$ أقل بكثير من الإنحراف المعياري للمتغير التابع

$S_y=18.1265$، لذلك نخلص إلى أن التوقعات في مثالنا أعلاه جيدة جداً، حيث حققنا جودة في توفيق معادلة الانحدار. ويمكن توضيح ذلك باستخدام تحليل التباين (Analysis of variance) لاختبار جوهرية معامل التحديد المتعدد، كالآتي:

$$F = \frac{SS_{Reg} \div K}{SS_{Resd} \div (n-k-1)} = \frac{4374.60 \div 3}{225.40 \div (15-3-1)} = 71.16$$

$$F = \frac{R_F^2 \div K}{(1-R_F^2) \div (n-k-1)} = \frac{0.9510 \div 3}{(1-0.9510) \div (15-3-1)} = 71.16$$

وهي ذات القيمة لاختبار - F والمبينة على الصفحة الرابعة من نتائج الكمبيوتر. ومن مقارنة قيمة -F المحسوبة مع القيمة الجدولية $F_{(0.05,3,11)}=3.59$ نخلص إلى أن معامل التحديد للنموذج التام جوهري من الناحية الاحصائية، فنرفض فرض العدم (والذي ينص على أن معامل الارتباط المتعدد في المجتمع الاحصائي يساوي صفراً)، ونقبل الفرض البديل (ومؤداه أنه من غير المعقول أن تكون العينة في مثالنا أعلاه مسحوبة من مجتمع احصائي يكون معامل الارتباط المتعدد فيه صفراً).

سادساً: تقييم الأهمية النسبية للمتغيرات المستقلة في تحديد الاختلافات الكلية في المتغير التابع:

لقد بيَّن اختبار -F الاحصائي أن معامل التحديد المتعدد للنموذج التام جوهري من الناحية الاحصائية، لذلك أصبح واجباً علينا تقييم الأهمية النسبية للمتغيرات المستقلة، ويمكننا إجراء هذا التقييم باختبار جوهرية معاملات الانحدار الجزئية أو باختبار الانخفاض في معامل التحديد المتعدد من النموذج التام إلى النموذج المقيد.

أ) اختبار جوهرية معاملات الانحدار الجزئية:

لقد سبق وذكرنا، أن معاملات الانحدار الجزئية هي في الحقيقية تقديرات من بيانات العينة لقيمة معامل الانحدار في المجتمع الاحصائي، ومن المتوقع أن تختلف قيمة هذه التقديرات من عينة إلى أخرى، آخذين في الاعتبار، أنه اعتماداً على النظرية الاحصائية، فإنه يُتوقع على المدى الطويل، أن يتساوى الوسط الحسابي لتوزيع هذه التقديرات مع قيمة المعامل في المجتمع الاحصائي.

ويمكننا تقدير الخطأ المعياري لتوزيع المعاينة لمعامل الانحدار كالآتي:

$$S_b^2 = \frac{SS_{Resd}}{n-k-1} \cdot \frac{\overline{r_{jj}}}{\Sigma x^2}$$

علماً أن $\overline{r_{jj}}$ هي عبارة عن القيم القطرية في مقلوب مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات المستقلة، إذن:

$$\overline{r_{11}} = 7.597062355 \;,\; \overline{r_{22}} = 7.501441973 \;,\; \overline{r_{33}} = 5.537226884$$

$$\Sigma x_1^2 = 60 \;,\; \Sigma x_2^2 = 2\,800000 \;,\; \Sigma x_3^2 = 280$$

$$S_{b_1}^2 = \frac{225.40}{15-3-1} \cdot \frac{7.597062355}{60} = 2.5945119$$

$$S_{b_1} = \sqrt{S_{b_1}^2} = 1.611$$

$$S_{b_2}^2 = \frac{225.40}{15-3-1} \cdot \frac{7.501441973}{2800000} = 0.000000548969$$

$$S_{b_2} = \sqrt{S_{b_2}^2} = 0.00741$$

$$S^2_{b_3} = \frac{225.40}{15-3-1} \cdot \frac{5.537226884}{280} = 0.4052243311$$

$$S_{b_3} = \sqrt{S^2_{b_3}} = 0.636572$$

وهي ذات القيم للخطأ المعياري لمعامل الانحدار (STD ERROR B) والمبينة على الصفحة الرابعة من نتائج الكمبيوتر. أما فترة الثقة لمعامل الانحدار وعند مستوى الثقة 95% فهي كالآتي:

$$b - t_{(11,0.025)}\ S_b < \beta < b + t_{(11,0.025)}\ S_b$$

ومثال ذلك، فترة الثقة لمعامل الانحدار الجزئي b_1:

$$\beta_1 = -4.928 \mp 2.201\ (1.611)$$

$$-8.474 < \beta < -1.382$$

ويمكن تفسير فترة الثقة أعلاه، على أنه إذا سحبنا 100 عينة عشوائية، كل منها ذات الحجم $n=15$، وأنشأنا 100 فترة ثقة للمعامل $b_1(b_1 \mp tS_{b_1})$، فإننا نتوقع أن تتضمن 95% من هذه الفترات على قيمة المعامل في المجتمع الاحصائي β، علماً أن فترة الثقة أعلاه، هي واحدة من المائة فترة ثقة الممكن انشاءها. آخذين في الاعتبار أن زيادة حجم العينة يؤدي إلى اعطاء قيم أصغر لكلٍ من إحصائية $-T$ والخطأ المعياري S_b، مما يؤدي بدوره إلى تضييق فترة الثقة. أما اختبارات $-T$ الاحصائية فهي:

$$t_1 = \frac{b_1 - \beta_1}{S_{b_1}} = \frac{-4.928}{1.611} = 3.058969584$$

ونظراً لأن القيمة المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية $2.201 = t_{(11,0.05)}$، فإننا نستنتج أن سعر السلعة X_1 جوهري في توقع الاختلافات في الكمية

المطلوبة من السلعة لمثالنا اعلاه. علماً أن:

$$t_1^2 = F_1$$

$$(3.058969584)^2 = 9.357$$

$$t_2 = \frac{0.0159}{0.00741} = 2.145748988$$

$$t_2^2 = F_2 = 4.604$$

$$t_3 = \frac{0.17498}{0.636572} = 0.274875683$$

$$t_3^2 = F_3 = 0.075$$

وهي ذات القيم لاختبار F الاحصائي والمبينة على الصفحة الرابعة من نتائج الكمبيوتر.

ب) تقييم الانخفاض في قيمة معامل التحديد المتعدد من النموذج التام إلى النموذج المقيد:

يمكننا الوصول إلى نفس نتائج اختبارات – t الاحصائية وذلك باستخدام اختبار –F الإحصائي. ويقوم هذا الاختبار على اعتبار أن المتغير المستقل المراد تقييمه قد أُدخل آخراً في معادلة الانحدار، أي على اعتبار أن بقية المتغيرات المستقلة الأخرى كانت قد أُدخلت قبله في معادلة الانحدار. ويتوجب علينا قبل كل شيء الحصول على معاملات التحديد المتعدد للنماذج المقيده:

$$R_1^2 = R^2_{y.23}$$

$$R_2^2 = R^2_{y.13}$$

$$R_3^2 = R^2_{y.12}$$

فعلى افتراض أننا نرغب في تقييم الأهمية النسبية للمتغير X_1. علينا عندئذٍ أن نحذف X_1 من النموذج التام، فتصبح مصفوفة معاملات الارتباط كالآتي:

	Y	X_2	X_3
Y	1.00000	0.94722	0.88995
X_2	0.94722	1.00000	0.88571
X_3	0.88995	0.88571	1.00000

ويمكننا ايجاد معامل التحديد المتعدد للنموذج المقيد كالآتي:

$$\underset{R^{-1}}{\begin{bmatrix} 4.63998061 & -4.109683826 \\ -4.109683826 & 4.63998061 \end{bmatrix}} \underset{V}{\begin{bmatrix} 0.94722 \\ 0.88995 \end{bmatrix}} = \underset{\beta}{\begin{bmatrix} 0.7376693121 \\ 0.2365760299 \end{bmatrix}}$$

$$R^2_{y.23} = \beta_{y2.3}\, r_{y2} + \beta_{y3.2}\, r_{y3}$$

$$R^2_{y.23} = (0.7376693121)\ (0.94722) + (0.2365760299)\ (0.88995)$$

$$R^2_{y.23} = 0.9092751258$$

وبنفس الأسلوب نحصل على:

$$R^2_{y.13} = 0.9304657664$$

$$R^2_{y.12} = 0.95065$$

إذن:

$$F_1 = \frac{(R^2_{y.123} - R^2_{y.23}) \div (K_1 - K_2)}{(1 - R^2_{y.123}) \div (n - K_1 - 1)}$$

$$F_1 = \frac{(0.9510 - 0.9092751258) \div (3-2)}{(1 - 0.9510) \div (15-3-1)} = 9.357$$

$$F_2 = \frac{(0.9510 - 0.9304657664) \div (3-2)}{(1 - 0.9510) \div (15-3-1)} = 4.61$$

$$F_3 = \frac{(0.9510 - 0.95065) \div (3-2)}{(1-0.9510) \div (15-3-1)} = 0.07858$$

وهي ذات القيم المبينة على الصفحة الرابعة من نتائج الكمبيوتر.

ونخلص بذلك إلى ضرورة الإبقاء على X_1 وإمكانية حذف X_2 و X_3 من معادلة التوقع.

الفصل الرّابع
المتغيّرات الترميزيّة

تمهيد :

تستخدم المتغيرات الترميزية (Coded variables) في تحليل الانحدار، وذلك لقياس المتغيرات النوعية (Qualitative variables)، وإدخالها في النموذج الاقتصادي. فقد يرغب الباحث في دراسة التأثير المكاني (Spatial effects) على ظاهرة اقتصادية معينة، فيستخدم المتغير الترميزي الوهمي (Dummy Variable)، ومثال ذلك مقارنة دوال الاستهلاك في بلدين مختلفين، أو مقارنة معاملات دالة الانتاج لصناعتين مختلفتين. وقد يرغب الباحث في دراسة التأثير الزمني (Temporal effects) على ظاهرة اقتصادية معينة، فيستخدم المتغير الترميزي، ومثال ذلك مقارنة دالة الاستهلاك لبلدٍ معين في فترتي الحرب والسلم، حيث يُتوقع أن ينتقل منحنى الاستهلاك نحو الأسفل (Downward shift) في فترة الحرب مقارنةً بفترة السلم. أو قد يرغب الباحث في دراسة الاختلافات الموسمية (Seasonal variation) لظاهرة اقتصادية معينة، فيستخدم في ذلك المتغيرات الترميزية. ولتوضيح أهمية وكيفية استخدام المتغيرات الترميزية في الاقتصاد القياسي، سنعمل على تطبيق الأساليب الإحصائية (التي مرّت معنا في الفصول السابقة) على أمثلة واقعية.

أمثلة تطبيقية:

مثال (1): مقارنة علاقة الانفاق الاستثماري بالناتج المحلي الإجمالي في الدول العربية النفطية والدول العربية غير النفطية:

يبين الجدول رقم (1) إجمالي الناتج المحلي GNP (بالمليون دولار أميركي)، والانفاق الاستثماري I (بالمليون دينار عربي حسابي) في الدول العربية لعام 1979:

الجدول رقم (1)

الانفاق الاستثماري (مليون د.ع.ح)، وإجمالي الناتج المحلي (مليون دولار أميركي) في الدول العربية لعام 1979[1]

البلد	العراق	الجزائر	الإمارات العربية	السعودية	الكويت	ليبيا
الانفاق الاستثماري	2868.13	920.97	775.14	10442.77	466.32	1383.01
إجمالي الناتج المحلي	34121.70	27189.20	14572.40	83914.60	23298.80	19045.70
البلد	الأردن	البحرين	تونس	سوريا	عمان	مصر
الانفاق الاستثماري	164.49	87.62	240.11	723.70	144.23	933.77
إجمالي الناتج المحلي	2279.60	2338.30	7217.70	9143.10	3394.60	17727.50
البلد	المغرب	السودان	الصومال	موريتانيا	اليمن الشمالي	اليمن الجنوبي
الانفاق الاستثماري	493.86	168.89	11.66	11.90	107.16	38.81
إجمالي الناتج المحلي	14736.70	6555.00	1192.20	606.00	3033.90	649.61

---

(1) التقرير الاقتصادي العربي الموحد عام 1981: ص: 195 وص: 249.

ولدراسة علاقــة النـاتــج المحلي بالإنفــاق الإستثماري في الدول العربية، علينا أن نأخذ في الإعتبار، أن اقتصاديات الدول العربية، تتفاوت بشكل كبير في إجمالي الناتج المحلي وفي إنفاقها الإستثماري. ويعود السبب في ذلك، إلى تفاوت الدول العربية من حيث الدخل القومي، الناتج عن التفاوت في مساهمة قطاع الصناعات الإستخراجية (النفط أساساً) في تكوين الناتج القومي. وهنا نلاحظ أنه باستطاعة الباحث أن يعالج هذا التفاوت بإحدى الطريقتين التاليتين:

(أ) تتم في الطريقة الأولى دراسة علاقة الناتج القومي بالإنفاق الإستثماري، وذلك باستخدام دالة خاصة بالدول النفطية (العراق، الجزائر، الإمارات، السعودية، الكويت وليبيا)، ودالة أخرى خاصة بالدول غير النفطية (بقية الدول العربية). * وبإستخدام تحليل الإنحدار الخطي البسيط، على البيانات الخاصة بالدول النفطية في الجدول رقم (1)، نحصل على الدالة الآتية للإنفاق الإستثماري في الدول النفطية:

$$I = -2160.07 + 0.1475\ GNP$$

$$r^2 = 96\%$$

وباستخدام تحليل الإنحدار الخطي البسيط، على البيانات الخاصة بالدول غير النفطية في الجدول رقم (1)، نحصل على الدالة الآتية للإنفاق الإستثماري في الدول غير النفطية:

$$I = -16.025 + 0.04818\ GNP$$

$$r^2 = 83\%$$

(ب) باستطاعة الباحث في الطريقة الثانية وعوضاً عن استخدام دالتين كما

* تمّ تصنيف الدول العربية إلى مجموعة نفطية ومجموعة غير نفطية، حيث أُدرج في مجموعة الدول غير النفطية، كل الدول التي يقل إنتاج النفط فيها عن نصف مليون برميل يومياً. علماً أن هذا هوالحد الفاصل المستخدم في «التقرير الإقتصادي العربي الموحد» لتصنيف الدول النفطية.

فعلنا في الطريقة الأولي، أن يستخدم دالة واحدة لمجموعتي الدول النفطية وغير النفطية. ويتم ذلك بإضافة المتغير الترميزي D إلى دالة الإنحدار، حيث تعطى الدول النفطية الرمز (0)، بينما تعطى الدول غير النفطية الرمز (1)، كما هو مبين في الجدول رقم (2). الجدير بالذكر، أن استخدام متغيرات الترميز في الطريقة الثانية، يتميز على استخدام الإنحدار الخطي البسيط في الطريقة الأولى، في أن استخدام متغيرات الترميز، تمكن الباحث من اختبار فروضٍ مختلفة أهمها:

أولاً: اختبار الانتقال في منحنى العلاقة (Shifts in intercept)، أي اختبار جوهرية الإختلاف في الثابت b_0 بين الدول النفطية والدول غير النفطية، ويتم ذلك باستخدام دالة الإنحدار المتعدد الآتية:

$$I = b_0 + b_1 \ GNP + b_2 \ D$$

ثانياً: اختبار الإختلاف في ميل منحنى العلاقة (Changes in slope)، أي اختبار جوهرية الإختلاف في المعامل b_1 بين الدول النفطية والدول غير النفطية، ويتم ذلك بإستخدام دالة الإنحدار المتعدد الآتية:

$$I = b_0 + b_1 \ GNP + b_3 \ (GNP) \ (D)$$

علماً أن المتغير (GNP) (D) هو متغير التفاعل (The interaction)، الناتج عن حواصل ضرب المتغير GNP بالمتغير D.

ثالثاً: اختبار جوهرية الإختلاف في كلٍ من b_0 و b_1، للدول النفطية والدول غير النفطية في آنٍ واحد، ويتم ذلك باستخدام دالة الإنحدار المتعدد الآتية:

$$I = b_0 + b_1 \ GNP + b_2 \ D + b_3 \ (GNP) \ (D)$$

الجدول رقم (2)

الإنفاق الإستثماري (I) الناتج القومي الإجمالي (GNP) والمتغير (D) لتمييز الدول العربية النفطية عن الدول العربية غير النفطية (عام 1979)

البلد	(GNP) (D)	D	GNP	I
العراق	0	0	34121.7	2868.13
الجزائر	0	0	27189.2	920.97
الإمارات	0	0	14572.4	775.14
السعودية	0	0	83914.6	10442.77
الكويت	0	0	23298.8	466.32
ليبيا	0	0	19045.7	1383.01
الأردن	2279.6	1	2279.6	164.49
البحرين	2338.3	1	2338.3	87.62
تونس	7217.7	1	7217.7	240.11
سوريا	9143.1	1	9143.1	723.70
عمان	3394.6	1	3394.6	144.23
مصر	17727.5	1	17727.5	933.77
المغرب	14736.7	1	14736.7	493.86
السودان	6555.0	1	6555.0	168.89
الصومال	1192.2	1	1192.2	11.66
موريتانيا	606.0	1	606.0	11.90
اليمن الشمالي	3033.9	1	3033.9	107.16
اليمن الجنوبي	649.6	1	649.6	38.81
المجموع:	**68874.0**	**12**	**271016.6**	**Σ: 19982.54**
الوسط الحسابي:	**3826.34**	**0.67**	**15056.48**	**M: 1110.14**
الإنحراف المعياري:	**5314.58**	**0.485**	**19891.28**	**S: 2431.02**

أما مصفوفة معاملات الإرتباط بين المتغيرات فهي :

مصفوفة معاملات الإرتباط بين متغيرات الجدول رقم (2)

	I	GNP	D	(GNP) (D)
I	1.0000000	0.9507513	−0.5085861	−0.1899989
GNP	0.9507513	1.0000000	−0.6816137	−0.1632077
D	−0.5085861	−0.6816137	1.0000000	0.5238563
(GNP) (D)	−0.1899989	—0.1632077	0.5238563	1.0000000

ولتقييم فيما إذا كانت الدول العربية النفطية والدول العربية غير النفطية، متفاوتة في دالة الإنفاق الإستثماري في كل من b_0 و b_1، يتوجب علينا في الخطوة الأولى، الحصول على معادلة الإنحدار الخطي المتعدد للنموذج التام، ويتم ذلك باستخدام طريقة مصفوفة معاملات الإرتباط التي مرّت معنا في الفصل الثالث، كالآتي:

$$\underset{R^{-1}}{\begin{bmatrix} 2.0677946100 & 1.6988551400 & -0.5524758676 \\ 1.6988551400 & 2.7739606100 & -1.1758904520 \\ -0.5524758676 & -1.1758904520 & 1.5258292960 \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{v}}{\begin{bmatrix} 0.9507513616 \\ -0.5085861657 \\ -0.1899989928 \end{bmatrix}} = \underset{\beta}{\begin{bmatrix} 1.206914178 \\ 0.428508390 \\ -0.217131597 \end{bmatrix}}$$

$$b = \beta \frac{S_y}{S_x}$$

$$b_1 = 1.206914178 \left(\frac{2431.23999}{19891.281}\right) = 0.1475$$

$$b_2 = 0.42850839 \left(\frac{2431.23999}{0.4850712501}\right) = 2147.5488$$

$$b_3 = -0.217131597 \left(\frac{2431.23999}{5314.576542}\right) = -0.10$$

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X}_1 - b_2\overline{X}_2 - b_3\overline{X}_3$$

$$b_0 = 1110.14111 - (0.1475)(15056.478) - (2147.5488)$$
$$(0.666667) - (-0.10)(3826.3444) = -2160$$

وبذلك نخلص إلى أن معادلة الإنحدار للنموذج التام هي :

$$I = -2160 + 0.1475\ GNP + 2147.55\ D - 0.10\ (GNP)\ (D)$$

علماً أن :

$$b_0 = -2160$$

$$b_1 = 0.1475$$

والتي حصلنا عليها في معادلة الإنحدار للنموذج التام، هي نفس القيم للثابت b_0 ولمعامل الإنحدار b_1، والتي كنّا قد حصلنا عليها بإستخدام الإنحدار الخطي البسيط، في دالة الإنفاق الإستثماري للدول النفطية. علماً أنه باستطاعتنا الحصول على قيم b_0 و b_1، كتلك التي حصلنا عليها باستخدام الإنحدار الخطي البسيط، في دالة الإنفاق الإستثماري للدول غير النفطية، وذلك من المعلومات المتوفرة في معادلة الإنحدار للنموذج التام، كالآتي :

$$b_0' = b_0 + b_2$$

$$b_0' = -2160 + 2147.55 \approx -13$$

$$b_1' = b_1 + b_3$$

$$b_1' = 0.1475 + (-0.10) = 0.048$$

وهي ذات القيم التي كنّا قد حصلنا عليها في دالة الإنفاق الإستثماري للدول

غير النفطية، مع أخطاء بسيطة بسبب التقريب (Rounding errors).* وبذلك نخلص إلى أن استخدام متغيرات الترميز، في دالة الإنحدار المتعدد، يُغنينا عن إستخدام دالتين للإنحدار البسيط، ويعطينا نفس النتائج. أضف إلى ذلك أن استخدام متغيرات الترميز يمكّننا من اختبار فروضٍ مختلفة، لا يمكن إجراءها باستخدام الإنحدار الخطي البسيط.

ولتقييم جوهرية الإنحدار للمعادلة الأخيرة، علينا الحصول على معامل التحديد المتعدد للنموذج التام:

$$R^2 = \beta_1 \ r_1 + \beta_2 \ r_2 + \beta_3 \ r_3$$

$$R^2 = (0.95)\ (1.21) + (-0.51)\ (0.43) + (-0.19)\ (-0.22)$$

$$R^2 = 0.971$$

وباستخدام اختبار -F الإحصائي:

$$F = \frac{0.971 \div 3}{(1-0.971) \div (18\text{-}3\text{-}1)} = 156$$

نخلص إلى أن قيمة -F المحسوبة أكبر من قيمة $F = 3.34$ الجدولية (عند مستوى المعنوية 5% ودرجات الحرية $dF_1=3$ و $dF_2=14$)، وبالتالي فإن معامل التحديد المتعدد للنموذج التام جوهري من الناحية الإحصائية.

ولتقييم جوهرية الإختلاف في قيمة الثابت b_0 بين الدول العربية النفطية، والدول العربية غير النفطية، يتوجب علينا حذف المتغير D من معادلة النموذج التام، ثم تقييم الإنخفاض في قيمة معامل التحديد المتعدد من النموذج التام، إلى النموذج المقيد. علماً أن معادلة الإنحدار، ومعامل التحديد المتعدد للنموذج المقيد هما:

* لاحظ أن الإشارة السلبية للثابت b_0 في دالة الإنفاق الإستثماري تنسجم مع توقعات النظرية الإقتصادية. انظر دالة الإستهلاك والإدخار في الفصل الثاني.

$$I_1 = -565.953 + 0.11548\ GNP - 0.016\ (GNP)\ (D)$$

$$R_1^2 = 0.905$$

إذن :

$$F = \frac{(0.971-0.905) \div (3-2)}{(1-0.971) \div (18-3-1)} = 31.86$$

ولتقييم جوهرية الإختلاف في قيمة معامل الإنحدار b_1 بين الدول العربية النفطية، والدول العربية غير النفطية، يتوجب علينا حذف المتغير (GNP) (D) من النموذج التام، ثم تقييم الإنخفاض في قيمة معامل التحديد المتعدد من النموذج التام إلى النموذج المقيد. علماً أن معادلة الإنحدار ومعامل التحديد المتعدد للنموذج المقيد هما:

$$I_2 = -1836.353 + 0.1379\ GNP + 1305.42\ D$$

$$R_2^2 = 0.94025$$

إذن :

$$F = \frac{(0.971-0.94025) \div (3-2)}{(1-0.971) \div (18-3-1)} = 14.85$$

ويتضح من اختبارات F، أن القيم المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية F=4.60. بمعنى أن الإنخفاض في قيمة معامل التحديد من النموذج التام إلى النموذج المقيد، يُعتبر جوهري من الناحية الإحصائية. وبالتالي فلا يمكننا استخدام نفس دالة الإنفاق الإستثماري، للدول العربية النفطية، وللدول العربية غير النفطية. ونخلص بذلك إلى أن دوال الإنفاق الإستثماري لمجموعتي الدول هي كالآتي:

في الدول العربية النفطية : $I = -2160 + 0.1475\ GNP$

وفي الدول العربية غير النفطية : $I = -13 + 0.048\ GNP$

مثال (2): دراسة الإتجاه العام لنمو سلفات القطاع الخاص خلال فترتي الحرب والسلم في لبنان:

يبين الجدول رقم (3) السلفات التي قدمت إلى القطاع الخاص (Loans to the private sector)، في لبنان خلال الفترة 1971-1979[1].

الجدول رقم (3)
سلفات القطاع الخاص بالمليون ليرة في لبنان

السنة	1979	1978	1977	1976	1975	1974	1973	1972	1971
سلفات القطاع الخاص	110	76	33	45	45	38	51	52	57

باستطاعة الباحث استخدام الإنحدار الخطي البسيط لدراسة الإتجاه العام لنمو السلفات خلال هذه الفترة. لكن نظراً لأن هذه الفترة تنقسم إلى فترة سلم 1971-1974، وإلى فترة حرب أهلية 1975-1979، لذلك فباستطاعة الباحث، وعوضاً عن استخدام دالتين إحداهما لفترة السلم، والأخرى لفترة الحرب، أن يستخدم متغير الترميز D، حيث تُعطى سني السلم الرمز (0)، بينما تُعطى سني الحرب الرمز (1)، كما هو مبين في الجدول رقم (4).

الجدير بالذكر، أنه لو اكتفينا بأخذ Y=F(T) في دراسة الإتجاه العام، دون إدخال المتغير D في النموذج الإقتصادي لحصلنا وقتئذٍ على تقديرات

(1) الأمم المتحدة، اللجنة الإقتصادية لغربي آسيا «المجموعة الإحصائية لمنطقة اللجنة الإقتصادية لغربي آسيا للفترة 1970-1979» العدد الرابع عام 1981 ص: 254.

متحيزة لمعاملات الإنحدار، ذلك لأن حذف المتغير D من النموذج، يعني تجاهل متغير هام يؤثر في Y. لذلك نجد أنه من الضروري إدخال المتغير D في النموذج كما فعلنا في الجدول رقم (4). فإدخال D في النموذج سيمكننا من الحصول على معاملات الإنحدار الجزئية التي تقيس التغير في Y نتيجة تغير X مع بقاء أثر بقية المتغيرات ثابتاً.

الجدول رقم (4)

سلفات القطاع الخاص Y ، الزمن T ، والمتغير الرمزي D

Y	T	D	D.T	
57	1	0	0	
52	2	0	0	
51	3	0	0	
38	4	0	0	
45	5	1	5	
45	6	1	6	
33	7	1	7	
76	8	1	8	
110	9	1	9	
Σ: 507	45	5	35	المجموع:
M: 56.33	5	0.555	3.889	الوسط الحسابي:
S: 23.59	2.74	0.527	3.855	الإنحراف المعياري

ويمكن الحصول على معامل التحديد المتعدد باستخدام مصفوفة معاملات الإرتباط بين المتغيرات كالآتي:

مصفوفة معاملات الإرتباط بين متغيرات الجدول رقم (4)

	Y	T	D	T.D
Y	1.0000	0.4900	0.2740	0.4840
T	0.4900	1.0000	0.8660	0.9472
D	0.2740	0.8660	1.0000	0.9570
T.D	0.4840	0.9472	0.9570	1.0000

ويمكن الحصول على معاملات الإنحدار الجزئية كالآتي:

$$\underset{R^{-1}}{\begin{bmatrix} 11.9978 & 5.7700 & -16.8860 \\ 5.7700 & 14.6584 & -19.4930 \\ -16.8860 & -19.4930 & 35.6498 \end{bmatrix}} \underset{V}{\begin{bmatrix} 0.490 \\ 0.274 \\ 0.484 \end{bmatrix}} = \underset{\beta}{\begin{bmatrix} -0.712922 \\ -2.590900 \\ 3.639400 \end{bmatrix}}$$

إذن:

$$b_1 = -0.712922 \left(\frac{23.59}{2.74}\right) = -6.13789$$

$$b_2 = -2.5909 \left(\frac{23.59}{0.527}\right) = -115.97643$$

$$b_3 = 3.6394 \left(\frac{23.59}{3.855}\right) = 22.26958$$

$$b_0 = 56.33 - (-6.14)(5) - (-115.976)(0.555) - (22.27)(3.889)$$

$$b_0 = 64.76$$

إذن، معادلة الإنحدار المتعدد للنموذج التام، هي:

$$\hat{Y} = 64.76 - 6.13\ T - 115.98\ D + 22.27\ (T)\ (D)$$

$$R^2 = 0.78$$

وبتقييم الإنخفاض في قيمة R^2 من النموذج التام إلى النموذج المقيد، والناتج عن حذف D أو DT نخلص إلى أن كلاً من D و DT جوهرية من الناحية الإحصائية، ويتوجب استخدام دالتين مختلفتين لفترتي السلم والحرب. علماً أن b_0، و b_1 في دالة النموذج التام، تمثل المعاملات لدالة الإنحدار لفترة السلم (والتي اعطيت الرمز (0))، أما دالة الإنحدار لفترة الحرب والتي أعطيت الرمز (1) فيمكن الحصول عليها كالآتي:

$$b_0' = b_0 + b_2$$

$$b_0' = 64.76 + (-115.98) = -51.22$$

$$b_1' = b_1 + b_3$$

$$b_1' = (-6.13) + 22.27 = 16.14$$

وبالتالي فإن معادلتي الإنحدار:

لفترة السلم: $\hat{Y} = 64.76 - 6.13\ T$

ولفترة الحرب: $\hat{Y} = -51.22 + 16.14\ T$

الجدير بالذكر، أنه كان من الممكن الحصول على هذه الدوال دون استخدام متغير الترميز. فلو أخذنا $Y=F(T)$ لفترة السلم حصلنا على:

$$\hat{Y} = 64-5.8\ T$$

ولو أخذنا $Y=F(T)$ لفترة الحرب لحصلنا على:

$$\hat{Y} = -50.9 + 16.1T$$

لكن كما ذكرنا سابقاً، فاستخدام متغيرات الترميز يتميز على استخدام الإنحدار الخطي البسيط، في أنه يُعطي نفس النتائج إضافة إلى إمكانية اختبار فروض مختلفة لا يمكن اجراؤها باستخدام الإنحدار الخطي البسيط.

حذف التغيرات الموسمية للظاهرة الإقتصادية باستخدام متغيرات الترميز:

يتميز الإقتصاد القومي لأي مجتمع حديث بالديناميكية، ويساعد تحليل السلاسل الزمنية (Time series analysis)، في دراسة التغيرات المختلفة التي تطرأ على الظاهرة الإقتصادية (ادخار، استثمار، انتاج... الخ). الجدير بالذكر، أنه قد تتوافر بيانات فصلية أو شهرية (Quarterly or monthly data) عن الظاهرة الإقتصادية، بحيث تُظهر هذه البيانات اختلافاً من فترة زمنية إلى فترة أخرى خلال السنة، كأن تزيد الصادرات في الفصل الثاني بنسبة 10% عمّا كانت عليه في الفصل الأول. فيُثار التساؤل حينئذٍ، فيما إذا كانت هذه الزيادة ترجع إلى النمو الطبيعي للظاهرة، والمتمثل في الإتجاه العام للصادرات، أو فيما إذا كانت هذه الزيادة ترجع إلى تغيرات موسمية تحدث في الفصل الثاني من كل سنة. وبالتالي، فإذا كان الباحث يرغب في دراسة الإتجاه العام على المدى الطويل (التنبؤ بقيم الظاهرة لفترة مقبلة) لسلسلة زمنية، فلا بدّ له وقتئذٍ من أن يأخذ في الإعتبار التغيرات الموسمية التي تطرأ على الظاهرة.

مثال (3): قياس متوسط التغير الموسمي في الإنفاق الحكومي في الأردن:

يبين الجدول رقم (5) النفقات الحكومية الفصلية (Quarterly government expenditures) في الأردن (بالمليون دينار) للفترة 1975-1977:

الجدول رقم (5)
النفقات الحكومية الفصلية (بالمليون دينار)
في الأردن للفترة (1975-1977)[1]

الفصل / السنة	I	II	III	IV
1975	38.90	38.62	47.80	80.04
1976	41.95	47.87	44.24	89.89
1977	60.38	59.91	60.25	125.41

ولدراسة كيفية ازدياد النفقات الحكومية عبر الزمن، باستطاعة الباحث مثلاً، دراسة الإتجاه العام للنفقات وذلك بأن يأخذ النفقات الحكومية دالة في الزمن، كما هو مبيّن في الجدول رقم (6):

(1) IMF, ''International Financial Statistics''. April 1979, P.P: 218-219.

الجدول رقم (6)
الإتجاه العام للنفقات الحكومية في الاردن

T	Y
1	38.90
2	38.62
3	47.80
4	80.04
5	41.95
6	47.87
7	44.24
8	89.89
9	60.38
10	59.91
11	60.25
12	125.41

$$\acute{Y} = 32.34 + 4.45\ T$$

$$r^2 = 0.39$$

لكن يعيب هذه الطريقة (وكما هو واضح من القيمة المنخفضة لمعامل التحديد)، أنها تعطي علاقة ضعيفة بين Y و T.ويعود السبب في ذلك، إلى أن الباحث لم يأخذ في الإعتبار الزيادة الطارئة على النفقات في الفصل الرابع من كل سنة كما هو مبين في الجدول رقم (6).

فإذا أراد الباحث أن يأخذَ التغيرات الموسمية في الإعتبار، فباستطاعته مثلاً استخدام طريقة المتوسطات المتحركة (Moving averages). وتتلخص هذه الطريقة، في الحصول على سلسلة من المتوسطات للقيم الأصلية للظاهرة. ونظراً لأن كل متوسط يُحسب على أربعة فصول، فسيكون بالضرورة خالٍ من التغيرات الموسمية، ذلك لأن كل أربعة فصول تُشكل سنة، وكل سنة بالتعريف لا تحتوي على تغيرات موسمية. آخذين في الإعتبار أن المتوسط المتحرك لعدد زوجي من المشاهدات سيقع في منتصف المسافة بين القيمتين المتوسطتين، فالمتوسط المتحرك لأربعة فصول سيقع بين الفصلين الثاني والثالث، لذلك يجب أخذ متوسط متحرك لكل قيمتين من القيم الناتجة، فيكون المتوسط النهائي متمركز أمام البيانات الفصلية الأساسية كما هو مبين في الجدول رقم (7):

الجدول رقم (7)

المتوسطات المتحركة للنفقات الحكومية الفصلية في الأردن

السنة	الفصل	النفقات الحكومية Y	المجموع المتحرك	المتوسطات المتحركة	المتوسطات المتحركة المتمركزة
	I	38.90			
	II	38.62			
1975			205.36	51.34	
	III	47.80			51.72125
			208.41	52.1025	
	IV	80.04			53.25875
			217.66	54.415	
	I	41.95			53.9700
			214.10	53.525	
	II	47.87			54.75625
1976			223.95	55.9875	
	III	44.24			58.29125
			242.38	60.595	
	IV	89.89			62.17875
			255.05	63.7625	
	I	60.38			65.76375
			217.06	67.765	
	II	59.91			72.2050
1977			306.58	76.645	
	III	60.25			
	IV	125.41			

وبإستطاعة الباحث بعد الحصول على المتوسطات المتحركة المتمركزة، دراسة الإتجاه العام للمتوسطات المتحركة كما هو مبين في الجدول رقم (8):

الجدول رقم (8)

الاتجاه العام للمتوسطات المتحركة للنفقات الحكومية في الأردن

T	Y
1	51.72125
2	53.25875
3	53.97000
4	54.75625
5	58.29125
6	62.17875
7	65.76375
8	72.20500

$$\hat{Y} = 46.48 + 2.79\ T$$

$$r^2 = 0.91$$

ويتضح من مقارنة معامل التحديد $r^2=0.91$ و $r^2=0.39$ للجدولين (8) و(6) ، أننا استطعنا تحقيق جودة في توفيق منحنى الإنحدار، نتيجةً لاستبعاد أثر التغيرات الموسمية بإستخدام المتوسطات المتحركة. لكن يعيب طريقة المتوسطات المتحركة وكما هو مبين في الجدول رقم (8) أننا نخسر عددٍ من

المشاهدات في بداية ونهاية السلسلة الزمنية. فقد خسرنا في مثالنا أعلاه المشاهدات للفصلين الأول والثاني من عام 1975، وخسرنا المشاهدات للفصلين الثالث والرابع من عام 1977.

نظراً لعيوب طريقة المتوسطات المتحركة، فإنه يُنصح عادةً باستخدام متغيرات الترميز في قياس التغيرات الموسمية للظاهرة الإقتصادية. وبالنسبة لمثالنا أعلاه، فباستطاعتنا استخدام متغيرات الترميز، بأن نعطي الرمز (1) لمشاهدات الفصل الثاني، بينما تُعطى المشاهدات لبقية الفصول الرمز (0) في المتغير الترميزي D_1. ثم تُعطى مشاهدات الفصل الثالث الرمز (1) بينما تُعطى المشاهدات لبقية الفصول الرمز (0) في المتغير الترميزي D_2، ثم تُعطى مشاهدات الفصل الرابع الرمز (1) بينما تُعطى المشاهدات لبقية الفصول الرمز (0) في المتغير الترميزي D_3. آخذين في الإعتبار أننا نحتاج دائماً إلى $K-1$ من متغيرات الترميز، حيث تمثل K عدد المجموعات. وبالنسبة لفصول السنة، فلدينا أربعة فصول، وبالتالي فإننا نحتاج إلى ثلاثة متغيرات ترميز، كما هو مبين في الجدول رقم (9):

الجدول رقم (9)

نفقات الحكومة في الأردن (Y)، الزمن (T) والتغيرات الموسمية (D)

Y	T	D_1	D_2	D_3
38.90	1	0	0	0
38.62	2	1	0	0
47.80	3	0	1	0
80.04	4	0	0	1
41.95	5	0	0	0
47.87	6	1	0	0
44.24	7	0	1	0
89.89	8	0	0	1
60.38	9	0	0	0
59.91	10	1	0	0
60.25	11	0	1	0
125.41	12	0	0	1
M: 61.27	**6.5**	**0.25**	**0.25**	**0.25**
S: 25.808	**3.6056**	**0.4523**	**0.4523**	**0.4523**

ويمكننا الحصول على معادلة الإنحدار ومعامل التحديد المتعدد، بإستخدام مصفوفة معاملات الإرتباط بين المتغيرات:

مصفوفة معاملات الإرتباط بين متغيرات الجدول رقم (9)

	Y	T	D_1	D_2	D_3
Y	1.0000	0.6218	−0.2914	−0.2455	0.8686
T	0.6218	1.0000	−0.0836	0.0836	0.2509
D_1	−0.2914	−0.0836	1.0000	−0.3330	−0.3330
D_2	−0.2455	0.0836	−0.3330	1.0000	−0.3330
D_3	0.8686	0.2509	−0.3330	−0.3330	1.0000

ويمكن الحصول على معاملات الإنحدار الجزئية كالآتي:

$$\overset{R^{-1}}{\begin{bmatrix} 1.11700 & -0.13954 & -0.27965 & -0.41982 \\ -0.13954 & 1.51556 & 0.78288 & 0.80030 \\ -0.27965 & 0.78288 & 1.56814 & 0.85304 \\ -0.41982 & 0.80039 & 0.85304 & 1.65590 \end{bmatrix}} \overset{V}{\begin{bmatrix} 0.6218 \\ -0.2914 \\ -0.2455 \\ 0.8686 \end{bmatrix}} = \overset{\beta}{\begin{bmatrix} 0.43921 \\ -0.0254 \\ -0.0461 \\ 0.7346 \end{bmatrix}}$$

أما معادلة الانحدار ومعامل التحديد المتعدد للنموذج التام فهي :

$$\hat{Y} = 51.81 + 25.06T - 1.449D_1 - 2.6304D_2 + 41.9159\,D_3$$

$$R_F^2 = 0.92989$$

أما بالنسبة للنماذج المقيدة والناتجة عن حذف المتغيرات الترميزية، فنلاحظ أن معامل التحديد المتعدد للنموذج المقيد الناتج عن حذف D_1 هو $R_1^2 = 0.9292$، ومعامل التحديد المتعدد للنموذج المقيد الناتج عن حذف D_2 هو $R_2^2 = 0.9286$، ومعامل التحديد المتعدد للنموذج المقيد الناتج عن حذف D_3 هو $R_3^2 = 0.604$، ومن اختبار الانخفاض الناتج عن حذف المتغير D_3 نجد أن :

$$F = \frac{(0.92989 - 0.604) / (4 - 3)}{(1 - 0.92989) / (12\text{-}4\text{-}1)} = 32.54$$

وهي جوهرية من الناحية الإحصائية . علماً أن الانخفاض في معامل التحديد المتعدد. والناتج عن حذف D_1 و D_2، غير جوهري من الناحية الإحصائية . وبذلك نخلص إلى أن الثابت $b_0 = 51.81$، هو للفصول I, II, III أما للفصل الرابع فإن الثابت b_0 يساوي إلى :

$$b_0' = b_0 + b_4$$

$$b_0' = 51.81 + 41.9159 = 93.73$$

علماً أن معاملات الانحدار الجزئية b، للمتغيرات الترميزية، تقيس متوسط التغير الموسمي (An index of the average seasonal shift). أما معادلة التوقع النهائية لمثالنا أعلاه فهي:

$$Y = b_0 + b_1T + b_4D_3$$

أما b_1 فهي الميل المشترك (The common regression coefficient)، ويقيس معدل التغير في الإنفاق الحكومي نتيجة تغير T بفترة زمنية واحدة. أما الثابت b_0 فيقيس متوسط التغير الموسمي للفصل الأول (وهو الفصل الذي أعطي الرمز (0) في كل المغيرات الترميزية). ونظراً لأن D_2، D_3 غير جوهري من الناحية الإحصائية، لذلك فإن معادلة التوقع للفصول I، II و III هي:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1T$$

$$\hat{Y} = 51.81 + 25.06\,T$$

ونظراً لأن D_3 جوهرية من الناحية الاحصائية، لذلك فإن متوسط التغير الموسمي للفصل الرابع سيكون مختلف عن بقية الفصول، وبالتالي فإن معادلة التوقع للفصل الرابع هي:

$$\hat{Y} = b_0' + b_1T$$

$$\hat{Y} = 93.73 + 25.06\,T$$

استخدام متغيرات الترميز في تحليل التغاير:

يعتبر تحليل التغاير (Analysis of covariance) من احدى الوسائل الجيدة، المستخدمة في وضع الرقابة الإحصائية (Statistical control) على تأثير

المتغيرات الخارجية (Extraneous variables)، التي تُدخل تحيز (Biase) متوقع في التصميم التجريبي (Experimental design)، وتظهر أهمية هذا التحليل في البحوث التي يضطر الباحث فيها إلى استخدام عينات (Samples) دون اللجوء إلى الطرق العشوائية في اختيار وتوزيع وحدات العينات (Random selection and random assignment).[1] فقد يرغب أحد الباحثين مثلاً، في تقييم تأثير ثلاثة طرق مختلفة لتدريس مادة الإحصاء، لطلبة السنة الأولى في الجامعة. لكن نظراً للصعوبات الإدارية، فإن الباحث لم يتمكن من اختيار عينة عشوائية من الطلبة، ولم يتمكن أيضاً من توزيع الطلبة بشكلٍ عشوائي على طرق التدريس المختلفة. وإنما اكتفى بتقسيم مجموع الطلبة إلى ثلاثة مجموعات موجودةٍ في قاعات ثلاث. نلاحظ في مثل هذه الحالة، أن الطلبة في القاعات الثلاث (وقبل تطبيق طرق التدريس المختلفة) يتفاوتون منذ بدء التجربة الإحصائية من حيث القدرة والمعرفة. وعلى الباحث أن يأخذ في الاعتبار هذا التفاوت المبدأي بين العينات الثلاث، حتى يتمكن في نهاية التجربة من تقييم الأثر الحقيقي الصافي لطرق التدريس المختلفة، وبالتالي فقد يلجأ الباحث إلى إجراء اختبار أولي (Pre-test) في الإحصاء، للطلبة في القاعات الثلاث قبل تطبيق الطرق المختلفة في التدريس، وفي نهاية فترة التجربة الإحصائية، يعمل الباحث على إبقاء أثر التفاوت المبدأي بين الطلبة ثابتاً من الناحية الإحصائية. ويمكن في هذه الحالة استخدام تحليل التغاير لحذف التحيز الذي أُدخل في التصميم التجريبي عند بدء التجربة الإحصائية.

وكمثال آخر، دعنا نفترض أن أحد الباحثين يرغب في دراسة العلاقة بين السمنة (الوزن الزائد) للعمال وقدرتهم الجسدية على الحركة في المعمل، وقد وجد أن العمال يتفاوتون من حيث العمر في الوظائف المختلفة، لذلك يتوجب

---

(1) Ferguson, G.A., "Statistical Analysis in psychology & Education". New York., McGraw - Hill book company, 1976, pp:346 - 359.

على الباحث وضع الرقابة الإحصائية على أثر المتغير الخارجي (العمر)، حتى يتمكن من دراسة العلاقة الحقيقية بين السمنة والقدرة الجسدية على الحركة. وقد يرغب الباحث في مجال البحوث الاقتصادية مثلاً، دراسة تأثير المكان الجغرافي على الانفاق الاستهلاكي في بلدانٍ (أو أماكن جغرافية) مختلفة. ونظراً لأن الدول المختلفة تختلف من حيث مستوى الدخل المتاح والذي يؤثر بدوره على الانفاق الاستهلاكي، لذلك يتوجب على الباحث أن يأخذ في الاعتبار الاختلاف المبدأي في الدخل المتاح ـ وقبل البدء بدراسة تأثير المكان الجغرافي على الانفاق الاستهلاكي ـ، ويمكن أن يتم ذلك بوضع الرقابة الإحصائية على أثر الدخل المتاح باستخدام تحليل التغاير.

الجدير بالذكر، أن تحليل التغاير يفترض تجانس معاملات الانحدار (The homogeneity of the regression coefficients). فهو يفترض إمكانية استخدام معادلة انحدار واحدة لكل المجموعات، وهذا يعني بالطبع افتراض أن معامل انحدار المتغير التابع على المتغير الرقابي، يكون واحداً في كل المجموعات. لذلك يتوجب على الباحث اختبار مدى صحة هذه الفرضية. فإن وجد أن هذه الفرضية غير صالحة، توجب حينئذٍ إيقاف العمل بتحليل التغاير، والعودة إلى استخدام معادلة انحدار خاصة بكل مجموعة على حدى. ذلك أن عدم صلاحية هذه الفرضية تعني وجود تفاعل (Interaction) بين المتغير الرقابي وبين المتغير المستقل.

مثال (4): تقييم جوهرية الاختلاف في نصيب الفرد من ناتج الصناعات التحويلية في الدول العربية بعد تقييد أثر الاختلاف المبدأي بين هذه الدول من حيث نسبة العاملين في الزراعة إلى كل العاملين:

لنفرض أن أحد الباحثين يرغب في تقييم جوهرية الاختلاف في نصيب الفرد من ناتج الصناعات التحويلية في الدول العربية. فلجأ إلى تقسيم الدول

العربية إلى ثلاثة مجموعات، حيث تشتمل المجموعة الأولى على الدول النفطية التي يزيد انتاج النفط فيها عن نصف مليون برميل يومياً، بينما تشتمل المجموعة الثانية على الدول العربية غير النفطية متوسطة النمو، في حين تشتمل المجموعة الثالثة على الدول العربية غير النفطية والأقل نمواً. ونظراً لوجود علاقة وثيقة بين الوزن النسبي لمساهمة الصناعة والوزن النسبي لمساهمة الزراعة في إجمالي الناتج المحلي، لذلك فقد يرغب الباحث في وضع الرقابة الإحصائية على مساهمة الزراعة من خلال تقييد أثر الاختلاف المبدأي بين الدول العربية من حيث نسبة العاملين في الزراعة إلى مجموع العاملين.

يبين الجدول رقم (10) نصيب الفرد من ناتج الصناعات التحويلية (Y) ونسبة العاملين في الزراعة إلى كل العاملين (X) في الدول العربية عام 1980 :

الجدول رقم (10)

نصيب الفرد من ناتج الصناعات التحويلية Y (بالمليون دولار)، ونسبة العاملين في الزراعة X في الدول العربية عام 1980[1]

مجموعة الدولة النفطية	I X	Y	مجموعة الدول غير النفطية متوسطة النمو	II X	Y	مجموعة الدول غير نفطية الأقل نمواً	III X	Y
جزائر	30	227.5	تونس	45	143.4	السودان	79	30.7
عراق	42	243.2	سوريا	49	331.3	الصومال	82	37.3
كويت	2	1897.1	مصر	51	164.5	موريتانيا	85	28.3
السعودية	62	467.4	الأردن	27	123.6	اليمن الشمالي	76	42.3
ليبيا	21	223.8	المغرب	53	138.6	اليمن الجنوبي	60	48.4
الوسط الحسابي :	31	611.88	الوسط الحسابي :	45	180.28	الوسط الحسابي :	76	37.4

(1) التقرير الاقتصادي العربي الموحد، ص ص: 205 - 206

يوجد في الجدول رقم (10) ثلاثة مجموعات للدول العربية، في كلٍ منها خمسة مشاهدات (دول)، ولكل مشاهدة يوجد قيمتين: القيمة الأولى على المتغير التابع Y والذي يمثل نصيب الفرد من ناتج الصناعات التحويلية، والقيمة الثانية على المتغير الرقابي X والذي يمثل نسبة العاملين في الزراعة إلى كل العاملين. أما المتغير المستقل الذي يريد الباحث دراسة تأثيره على المتغير Y فهو الوضع الإقتصادي للبلد، والذي ينقسم بدوره إلى ثلاثة مستويات: دول نفطية ـ دول غير نفطية متوسطة النمو ـ ودول غير نفطية أقل نمواً.

ويهدف الباحث في المثال أعلاه إلى مقارنة متوسطات نصيب الفرد من ناتج الصناعات التحويلية في المجموعات العربية الثلاث:

$$\bar{Y}_1 = 611.88 \quad , \quad \bar{Y}_2 = 180.28 \quad , \quad \bar{Y}_3 = 37.4$$

وذلك لمعرفة فيما إذا كانت هذه الفروقات الظاهرية هي فروقات حقيقية ناتجة عن اختلاف الدول العربية من حيث كونها نفطية أو غير نفطية، متوسطة النمو أو أقل نمواً. أو أنها فروقات ظاهرية ناتجة عن الإختلاف المبدأي بين هذه الدول من حيث نسبة العاملين في الزراعة:

$$\bar{X}_1 = 31 \quad , \quad \bar{X}_2 = 45 \quad , \quad \bar{X}_3 = 76$$

ولمعرفة فيما إذا كانت هذه الفروقات الظاهرية هي فروقات حقيقية، وناتجة عن الإختلاف في المستوى الإقتصادي للبلد، فإن باستطاعة الباحث استخدام تحليل التغاير وذلك لوضع الرقابة الإحصائية على أثر الإختلاف المبدأي بين هذه الدول على المتغير الرقابي. علماً أنه يمكننا إجراء تحليل التغاير باستخدام متغيرات الترميز الوهمية (Dummy coding)، أو بإستخدام الترميز التأثيري (Effect coding). آخذين في الإعتبار أن طريقتي الترميز تعطيان نفس النتيجة، لكن يعود الإختلاف بين الطريقتين إلى أننا نستعمل الرمز (0) لكل

مشاهدات المجموعة الرقابية في الترميز الوهمي، في حين أننا نستعمل الرمز (1−) في حالة الترميز التأثيري. وتجدر الإشارة هنا إلى التسهيلات في العمليات الحسابية التي تحققها طرق الترميز. فمن المعلوم أن الإنحراف المعياري للمتغير X يساوي إلى: $S_x=\sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n-1}}$ لكن في حالة الترميز الوهمي فإن الإنحراف المعياري يساوي إلى: $S_x=\sqrt{\frac{n}{n-1}\cdot p.q}$، حيث تمثل P نسبة المشاهدات التي أعطيت الرمز (1) في المتغير الترميزي. أما في حالة الترميز التأثيري (وعندما يتساوى عدد المشاهدات في المجموعات) فإن الانحراف المعياري يساوي إلى: $S_x=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{n-1}}$، ذلك لأن $\bar{X}=0$. كذلك نلاحظ أن معاملات الإرتباط بين المتغيرات الترميزية في حالة الترميز التأثيري تساوي إلى: $r=\frac{N(n)}{N(2n)}=\frac{n}{2n}$، حيث ترمز N إلى عدد المشاهدات الكلية، في حين ترمز n إلى عدد المشاهدات في المجموعة الواحدة. ولنبدأ الآن بتطبيق طريقتي الترميز على المثال أعلاه:

(أ) استخدام الترميز الوهمي:

وفيه نخلق متغيرات الترميز الوهمي، حيث تُعطى المشاهدات في المجموعة الأولى الرمز (1) بينما تعطى بقية المشاهدات الرمز (0) في المتغير المستقل X_2، في حين تُعطى المشاهدات في المجموعة الثانية الرمز (1) بينما تعطى بقية المشاهدات الرمز (0) في المتغير المستقل X_3. أما المجموعة الثالثة فلا تحتاج إلى ترميز لأننا نحتاج إلى K-1 من متغيرات الترميز حيث تمثل K عدد المجموعات، كما هو مبين في الجدول رقم (11). أما المتغيرات X_4 و X_5 فهي متغيرات التفاعل الناتجة عن حاصل ضرب المتغير الرقابي X_1 بالمتغير الترميزي X_2 و X_3.

الجدول رقم (11)
استخدام الترميز الوهمي في تحليل التغاير

Y	X_1	X_2	X_3	$X_4 = (X_1.X_2)$	$X_5 = (X_1.X_3)$
227.5	30	1	0	30	0
243.2	42	1	0	42	0
467.4	62	1	0	62	0
223.8	21	1	0	21	0
1897.1	2	1	0	2	0
143.4	45	0	1	0	45
331.3	49	0	1	0	49
164.5	51	0	1	0	51
123.6	27	0	1	0	27
138.6	53	0	1	0	53
30.7	79	0	0	0	0
37.3	82	0	0	0	0
28.3	85	0	0	0	0
42.3	76	0	0	0	0
48.4	60	0	0	0	0
M: 276.49	**50.93**	**0.333**	**0.333**	**10.47**	**15**
S: 465.28	**24.16**	**0.488**	**0.488**	**19.47**	**22.66**

وحتى يتمكن الباحث من اختبار جوهرية التفاعل (أي تجانس إنحدار Y على X في المجموعات الثلاث)، عليه اختبار الإنخفاض في معامل التحديد المتعدد من النموذج التام إلى النموذج المقيد. ويتوجب عليه في الخطوة الأولى الحصول على مصفوفة معاملات الإرتباط بين المتغيرات كالآتي:

مصفوفة معاملات الإرتباط بين متغيرات الجدول رقم (11)

	Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Y	1.0000	−0.6416	0.5275	−0.1514	0.0880	−0.1385
X_1	−0.6416	1.0000	−0.5900	−0.1800	−0.1600	−0.1200
X_2	0.5275	−0.5900	1.0000	−0.5000	0.7900	−0.4800
X_3	−0.1514	−0.1800	−0.5000	1.0000	−0.3900	0.9700
X_4	0.0880	−0.1600	0.7900	−0.3900	1.0000	−0.3800
X_5	−0.1385	−0.1200	−0.4800	0.9700	−0.3800	1.0000

وللحصول على معامل التحديد المتعدد للنموذج التام علينا إيجاد:

$$R^{-1} * V = \beta$$

حيث أن R^{-1} هي مقلوب مصفوفة معاملات الإرتباط بين المتغيرات المستقلة، في حين أن V هي معاملات الإرتباط بين المتغير التابع (Y) والمتغيرات الأخرى في النموذج، كالآتي:

$$\underset{R^{-1}}{\begin{bmatrix} 36.2378 & 57.2404 & 61.3041 & -30.4078 & -39.1959 \\ 57.2404 & 93.4293 & 97.8226 & -50.1468 & -62.2288 \\ 61.3041 & 97.8226 & 121.1081 & -51.7078 & -82.8125 \\ -30.4078 & -50.1468 & -51.7078 & 28.1800 & 33.1456 \\ -39.1959 & -62.2288 & -82.8125 & 33.1456 & 59.3500 \end{bmatrix}} \underset{V}{\begin{bmatrix} -0.6416 \\ 0.5275 \\ -0.1514 \\ 0.0880 \\ -0.1385 \end{bmatrix}} = \underset{\beta}{\begin{bmatrix} 0.4156 \\ 1.9540 \\ 0.8521 \\ -1.2250 \\ -0.4430 \end{bmatrix}}$$

أما معامل التحديد المتعدد للنموذج التام فهو:

$$R^2_{y.12345} = R^2_F = \Sigma\ V.\beta = 0.59$$

بمعنى أن 59% من الإختلافات الكلية في نصيب الفرد من ناتج الصناعات التحويلية، في الدول العربية، تمّ تحديدها (أو تفسيرها) بالمتغيرات $X_2 .... X_5$. ونظراً لأن الهدف في المرحلة الأولى، هو تقييم تجانس معاملات الإنحدار لذلك يجب حذف متغيرات التفاعل والحصول على معامل التحديد للنموذج المقيد $Y = F(X_1, X_2, X_3)$:

$$\overset{R^{-1}}{\begin{bmatrix} 2.8485 & 2.5826 & 1.8040 \\ 2.5826 & 3.6749 & 2.3023 \\ 1.8040 & 2.3023 & 2.4759 \end{bmatrix}} \overset{V}{\begin{bmatrix} -0.6416 \\ 0.5275 \\ -0.1514 \end{bmatrix}} = \overset{\beta}{\begin{bmatrix} -0.7384 \\ -0.0669 \\ -0.3179 \end{bmatrix}}$$

$$R^2_{y\,123} = R^2_R = 0.49$$

ولإختبار جوهرية الإنخفاض في معامل التحديد المتعدد، من النموذج التام إلى النموذج المقيد، نستعمل إحصائية $F-$:

$$F = \frac{(R_F^2 - R_R^2) \ / \ (K_1 - K_2)}{(1 - R_F^2) \ / \ (N - K_1 - 1)}$$

$$F = \frac{(0.59 - 0.49) / (5 - 3)}{(1 - 0.59) / (15 - 5 - 1)} = 1.10$$

وتشير قيمة F ـ غير الجوهرية ـ إلى أنه لا يوجد تفاعل بين المتغير الرقابي وبين المتغير المستقل مما يثبت صحة فرضية تجانس معاملات الإنحدار. وبالتالي فقد أصبح بالإمكان إستخدام نفس الميل b_1 لكل المجموعات، إضافةً إلى إمكانية اختبار جوهرية الإختلاف بين متوسطات نصيب الفرد من ناتج الصناعات التحويلية في المجموعات الثلاث، وهنا نلاحظ أن المتغير الرقابي X_1

يحدد $(-0.6416)^2 \approx 0.42$ من الإختلافات الكلية في Y، في حين أن المتغيرين الرقابي والمستقل يحددان معاً $R^2_{y.123} = 0.49$ من الإختلافات الكلية في Y، وبالتالي فإن المتغير المستقل يحدد $R^2_{y.123} - R^2_{y.1}$ ويمكن تقييم جوهرية المتغير المستقل بإستخدام اختبار F-، كالآتي:[1]

$$F = \frac{[0.49 - (-.6416)^2] \div 2}{(1-.49) \ / \ (15-3-1)} = 0.84$$

وتشير النتيجة أعلاه إلى أن الإختلاف بين متوسطات المجموعات الثلاث في نصيب الفرد من ناتج الصناعات التحويلية وبعد استبعاد أثر المتغير الرقابي (نسبة العاملين في الزراعة) هو فرق غير جوهري من الناحية الإحصائية. فالإختلاف الظاهري بين متوسطات المجموعات الثلاث، يعود إلى الإختلاف المبد أي بين المجموعات الثلاث من حيث ارتفاع أو انخفاض نسبة العاملين في الزراعة.

(ب) استخدام تحليل البواقي في تفسير ما يحدث في تحليل التغاير:

لا يعدو تحليل التغاير في الحقيقة عن كونه رقابة إحصائية كالتي مرت بنا عند مناقشة معاملات الإرتباط الجزئية ونصف الجزئية، في الفصل الثالث من هذا الكتاب. ولتوضيح ذلك سنأخذ إنحدار المتغير التابع Y، على المتغير الرقابي ثم نحسب البواقي كما هو مبين في الجدول رقم (12)، ثم نأخذ إنحدار البواقي على المتغير المستقل كما هو مبين في الجدول رقم (13):

---

(١) تجدر الملاحظة في المثال أعلاه إلى أن قيمة معامل التحديد للنموذج البسيط $Y = F(X_1)$ كانت $R^2_{Y.1} \approx 0.42$. ونتساءل في اختبار F الاحصائي، فيما إذا كانت إضافة المتغير المستقل (X_1) و (X_2) إلى النموذج ستؤدي إلى زيادة قيمة R^2 بشكل جوهري من الناحية الإحصائية.

الجدول رقم (12)

حساب البواقي من إنحدار المتغير التابع Y على المتغير الرقابي X_1

Y	X_1	$\hat{Y}$	$Y - \hat{Y} = d$
227.5	30	535.15	−307.65
243.2	42	386.87	−143.68
467.4	62	139.75	327.65
223.8	21	646.35	−422.55
1897.1	2	881.12	1015.98
143.4	45	349.81	−206.41
331.3	49	300.38	30.92
164.5	51	275.67	−111.17
123.6	27	572.22	−448.62
138.6	53	250.96	−112.36
30.7	79	−70.30	101.00
37.3	82	−107.37	144.67
28.3	85	−144.44	172.74
42.3	76	−33.23	75.53
48.4	60	164.46	−116.06

الجدول رقم (13)
إنحدار ما تبقى من المتغير التابع (بعد حذف أثر المتغير الرقابي)
على المتغير المستقل

d	X_2	X_3
−307.65	1	0
−143.68	1	0
327.65	1	0
−422.55	1	0
1015.98	1	0
−206.41	0	1
30.92	0	1
−111.17	0	1
−448.62	0	1
−112.36	0	1
101.00	0	0
144.67	0	0
172.74	0	0
75.53	0	0
−116.06	0	0

مصفوفة معاملات الإرتباط بين متغيرات الجدول رقم (13)

	d	X_2	X_3
d	1.0000	0.1927	−0.3477
X_2	0.1927	1.0000	−0.5000
X_3	−.3477	−0.5000	1.0000

أما معامل التحديد $R^2_{d\,x_2x_3}$، فيقيس العلاقة بين البواقي وبين المتغير المستقل ويساوي إلى:

$$R^2_{d.x_2x_3} = 0.1213$$

ولتقييم معامل التحديد نستخدم اختبار F :

$$F = \frac{0.1213 \div 2}{(1-0.1213) \div (15-2-1)} = 0.84$$

وهي نفس القيمة لإحصائية –F التي تمّ الحصول عليها باستخدام تحليل التغاير ص ٢١٦.

(د) **استخدام الترميز التأثيري:**

يمكن الوصول إلى نفس النتائج السابقة بإستخدام الترميز التأثيري (Effect coding)، عوضاً عن استخدام الترميز الوهمي، علماً أنه في الترميز التأثيري نعطي مشاهدات المجموعات الأخيرة الرمز (1−) بدلاً من الرمز (0)، كما هو مبين في الجدول رقم (14):

الجدول رقم (14)

استخدام الترميز التأثيري في تحليل التغاير

Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
227.5	30	1	0	30	0
243.2	42	1	0	42	0
467.4	62	1	0	62	0
223.8	21	1	0	21	0
1897.1	2	1	0	2	0
143.4	45	0	1	0	45
331.3	49	0	1	0	49
164.5	51	0	1	0	51
123.6	27	0	1	0	27
138.6	53	0	1	0	53
30.7	79	−1	−1	−79	−79
37.3	82	−1	−1	−82	−82
28.3	85	−1	−1	−85	−85
42.3	76	−1	−1	−76	−76
48.4	60	−1	−1	−60	−60
M: 276.49	**50.93**	**0**	**0**	**−15**	**−10.47**
S: 465.28	**24.16**	**0.8452**	**0.8452**	**48.66**	**52.43**

مصفوفة معاملات الإرتباط بين متغيرات الجدول رقم (14)

	Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Y	1.0000	−0.6416	0.5217	0.1298	0.324	0.2080
X_1	−0.6416	1.0000	−0.7900	−0.5500	−0.680	−0.6200
X_2	0.5217	−0.7900	1.0000	0.5000	0.940	0.6200
X_3	0.1298	−0.5500	0.5000	1.0000	0.660	0.9800
X_4	0.3240	−0.6800	0.9400	0.6600	1.000	0.7600
X_5	0.2080	−0.6200	0.6200	0.9800	0.760	1.0000

وبالحصول على معامل التحديد المتعدد في الصفحة القادمة، نخلص إلى أن الترميز التأثيري يعطي نفس نتائج الترميز الوهمي، لكن يُفضل إستخدام الترميز التأثيري في تحليل التغاير أو التباين لأنه يُوضح في حالة وجود تجربة إحصائية(Experimental design) أثر المعالجات(The effect of Treatments).

وأخيراً تجدر الإشارة إلى أن الهدف من المثال السابق عن تحليل التغاير كان محصوراً بإيضاح كيفية استخدام الطرق المختلفة في الترميز، وإيضاح كيفية استخدام تحليل التغاير، علماً أن صعوبة الحصول على البيانات فرض استخدام البيانات الموضحة في الجدول (10). كذلك تجدر الإشارة إلى أنه عند اختبار جوهرية معامل التحديد للنموذج التام فإنه يتوجب عدم اختبار التفاعل وعدم اختبار جوهرية المتغير المستقل إذا كانت احصائية F- للنموذج التام غير جوهرية من الناحية الإحصائية، لكن التوسع في التحليل السابق كان بهدف شرح تحليل التغاير بشكل عام.

$$\underset{R^{-1}}{\begin{bmatrix} 5.2260 & 9.8529 & 2.2552 & -7.8992 & 0.9246 \\ 9.8529 & 30.0379 & 11.0981 & -26.2391 & -3.4491 \\ 2.2552 & 11.0981 & 49.3578 & -1.2934 & -52.8702 \\ -7.8992 & -26.2391 & -1.2934 & 27.3245 & -8.1283 \\ 0.9246 & -3.4491 & -52.8702 & -8.1283 & 61.7020 \end{bmatrix}} \underset{V}{\begin{bmatrix} -0.6416 \\ 0.5217 \\ 0.1298 \\ 0.3240 \\ 0.2080 \end{bmatrix}} = \underset{\beta}{\begin{bmatrix} -0.2869 \\ 1.5710 \\ -0.6700 \\ -1.6260 \\ 0.9450 \end{bmatrix}}$$

أما معامل التحديد المتعدد للنموذج التام فهو:

$$R^2_{y\ 12345} = R^2_F = 0.59$$

الفصل الخامس
العلاقات غير الخطية

تمهيد:

يصادف الباحث في دراسته للظواهر الإقتصادية أن تكون معادلة الإنحدار غير خطية (Nonlinear regression)، حيث لا يتخذ الشكل الإنتشاري للعلاقة بين المتغيرين شكل الخط المستقيم. علماً أنه في مجال الإقتصاد القياسي، فإننا نواجه نوعين من الدوال غير الخطية، حيث تكون الدالة في النوع الأول غير خطية في معالم الإنحدار للمجتمع الإحصائي، ومثال ذلك دالة كوب ـ دوغلاس للإنتاج والدالة الأسية للنمو. بينما تكون الدالة في النوع الثاني غير خطية في المتغيرات، ومثال ذلك دالة كينز لتفضيل السيولة ودالة التكاليف.

الجدير بالذكر، أن الباحث في معالجته للدوال غير الخطية، لا يستطيع استخدام الإنحدار الخطي أو استخدام معامل الإرتباط المستقيم إلّا بعد إجراء التحويلات (Transformation) المناسبة على معادلة التوقع، لتحويلها من شكلها غير الخطي إلى دالة خطية، ويمكن توضيح ذلك ببعض الأمثلة التطبيقية.

أمثلة تطبيقية:

مثال (1): استخدام دالة كوب ـ دوغلاس للإنتاج في قياس مرونة الناتج

الصناعي بالنسبة للعمالة ومرونة الناتج الصناعي بالنسبة للإستثمارات المتجة في صناعة المواد الغذائية في لبنان:

تُعبّر دالة الإنتاج (Cobb-Douglas production function) عن المُنتَج (Output) في شكل دالة لإثنين أو أكثر من المدخلات (Inputs). فكثيراً ما يفترض الإقتصاديون أن الإنتاج دالة لكلٍ من العمل ورأس المال كالآتي:

$$Q = A\ L^{\beta}\ K^{1-\beta}\ V$$

حيث يمثل المتغير العشوائي V العامل الذي يُميّز المؤسسات بعضها عن بعض من حيث القدرة التقنية على الإنتاج، فبدون هذا المتغير العشوائي فإن كل المؤسسات في السوق سوف تُنتج نفس الإنتاج Q بإستخدام ذات الكمية من العمل L ورأس المال K. ويمثل المعامل β قيمة مساهمة العمل في الإنتاج، في حين يمثل المعامل β−1 قيمة مساهمة رأس المال في الإنتاج.

الجدير بالذكر، أن باستطاعة المنتج إنتاج السلعة بإتباع طريقة إنتاج تعتمد على العمل بدرجة أكبر من الإعتماد على رأس المال، أو إنتاج نفس السلعة لكن بطريقة إنتاج أخرى تعتمد على رأس المال بدرجة أكبر من الإعتماد على العمل. آخذين في الإعتبار، أن الدالة أعلاه هي دالة متجانسة من الدرجة الأولى (Homogeneous function of degree one)، فإذا تضاعف كل من العمل ورأس المال بنسبة λ فحينئذٍ يزيد الناتج الكلي بنفس النسبة، ويمكن توضيح ذلك كالآتي:

$$\hat{Q} = AL^{\beta}\ K^{1-\beta}$$

$$\hat{Q} = A(\lambda L)^{\beta}\ (\lambda K)^{1-\beta}$$

$$\hat{Q} = A\ \lambda^{\beta+1-\beta}\ L^{\beta}\ K^{1-\beta} = \lambda\ AL^{\beta}\ K^{1-\beta}$$

وتدعى الحالة أعلاه بخضوع الإنتاج لقانون الغلة الثابتة (Constant return to scale)، حيث يؤدي زيادة كل من العمل ورأس المال بنسبة معينة

إلى زيادة الإنتاج بنفس النسبة. علماً أن حالة ثبات الغلة هي حالة خاصة يمكن أن تظهر في بعض أنواع الإنتاج فقط. فقد يحدث في حالاتٍ أخرى، أن تؤدي زيادة عناصر الإنتاج المستخدمة إلى إتساع حجم الصناعة، فيستفيد المنتج حينئذٍ من مزايا المشروع الكبير وأهمها إمكانية تقسيم العمل والتخصص، الأمر الذي يؤدي إلى تغير الإنتاج بنسبة أكبر من نسبة التغير في عناصر الإنتاج، وتسمى هذه الحالة بخضوع الإنتاج لقانون الغلة المتزايدة (Increasing return to scale). لكن قد يحدث في حالات أخرى، أن اتساع حجم المشروع بعد حد معين يؤدي إلى ظهور بعض المشاكل الإدارية والتنظيمية التي تتسبب في كثير من الضياع والنقص في الكفاية الحدية لعناصر الإنتاج الموظفة، فتبدأ بذلك مرحلة تناقص الغلة (Decreasing return to scale)، حيث يتغير الإنتاج بنسبة أقل من نسبة التغير في عناصر الإنتاج[1].

وبذلك نخلص إلى أنه ليس من الضروري إفتراض أن أُس (Exponent) رأس المال هو $1-\beta$ وأن أُس العمل هو β. فقد نفترض أن أُس رأس المال هو قيمة أخرى غير $1-\beta$، ولتكن α، فحينئذٍ تكون $\beta+\alpha>1$ في حالة الغلة المتزايدة، وتكون $\beta+\alpha<1$ في حالة الغلة المتناقصة، وإذا تساوت α مع $1-\beta$ فحينئذٍ يخضع الإنتاج لحالة الغلة الثابتة $\alpha+\beta=1$. علماً أن الذي يهمنا في الإقتصاد القياسي هو كيفية دراسة هذه العلاقة غير الخطية بين المتغيرات.

لا شك أن أسهل الطرق لتحويل دالة الإنتاج من دالة غير خطية تعتمد على ضرب الحدود، إلى دالة خطية تعتمد على صيغة جمعية، يتم بتحويل دالة

---

(١) انظر: اسماعيل محمد هاشم ص ص: 270-273. وانظر

— Stephen Glaister., PP: 147-148
— Wonnacott & Wonnacott, PP: 91-99

الإنتاج إلى صيغة لوغارتمية، كالآتي:

أ: في حالة خضوع الإنتاج لقانون ثبات الغلة:

$$Q = A\, L^{\beta}\, K^{1-\beta}\, V$$

$$Ln\,Q = LnA + \beta\, LnL + (1-\beta)\, LnK + LnV$$

$$LnQ - LnK = LnA + \beta\, LnL - \beta\, LnK + LnV$$

$$LnQ - LnK = LnA + \beta(LnL - LnK) + LnV$$

وبإعادة تعريف المتغيرات والمعاملات في المعادلة النهائية كالآتي:

$$LnQ - LnK = Y$$

$$\beta\,(LnL - LnK) = b_1X$$

$$LnA = b_0$$

$$LnV = e$$

فإننا نحصل على:

$$Y = b_0 + b_1X + e$$

وهي عبارة عن معادلة الإنحدار الخطي البسيط التي مرّت معنا في الفصل الثاني من هذا المؤلف[1].

ب: في حالة خضوع الإنتاج لقانون الغلة المتزايدة أو المتناقصة:

$$Q = b_0\, L^{b_1}\, K^{b_2}\, V$$

$$LnQ = Lnb_0 + b_1LnL + b_2\, LnK + LnV$$

وبإعادة تسمية المتغيرات، نحصل على:

$$Y = Lnb_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + e$$

---

(١) يتم اللجوء عادة إلى تحويل طرفي المعادلة إلى صيغة لوغارتمية (Double log) كما فعلنا في تحويل دالة الإنتاج، وذلك عندما يكون هذا التحويل أفضل من غيره. ويمكننا بالرسم البياني معرفة فيما إذا كانت صيغة تحويل طرفي المعادلة مناسباً. فإذا رسمنا log Y مع log X وحصلنا على خط مستقيم، كان التحويل مناسباً.

وهي عبارة عن معادلة الإنحدار الخطي المتعدد التي مرّت معنا في الفصل الثالث من هذا المؤلف.

يبين الجدول رقم (1) القيمة المضافة (Value added)بآلاف الليرات اللبنانية، والإستثمارات (Investment) المنتجة بآلاف الليرات اللبنانية، وعدد العاملين (Number of employees) في صناعة المواد الغذائية ـ عدا المشروبات ـ (Food industries) في لبنان لعام 1964[1]:

الجدول رقم (1)

القيمة المضافة Q، عدد العمال L، والإستثمارات المنتجة K في صناعة المواد الغذائية في لبنان عام 1964

المنطقة الجغرافية	K	L	Q
بيروت	977	2320	15804
ضواحي بيروت	1952	2416	17074
جبل لبنان	2314	571	5410
طرابلس وضواحيها	143	579	2053
لبنان الشمالي	711	132	374
(ما عدا طرابلس وضواحيها)			
لبنان الجنوبي	2	229	288
البقاع	928	434	1742

ويبين الجدول رقم (2) تحويل المتغيرات إلى صيغة لوغارتمية، مع العمليات الحسابية اللازمة للحصول على معاملات الإنحدار، مفترضين في ذلك عدم خضوع الإنتاج لقانون الغلة الثابتة:

(١) مديرية الاحصاء المركزي «التعداد الصناعي في لبنان» لعام 1964. بيروت لبنان.

الجدول رقم (2)

تحويل متغيرات الجدول رقم (1) إلى صيغة لوغارتمية مع العمليات الحسابية

$LnQ = Y$	$LnL = X_1$	$LnK = X_2$	Y^2	X_1^2	X_2^2	X_1X_2	YX_1	YX_2
9.668	7.7490	6.8840	93.47020	60.0470	47.38946	74.917	53.34400	66.5545
9.745	7.7899	7.5770	94.96503	60.6830	57.41093	75.913	59.02410	73.8380
8.596	6.3470	7.7467	73.89122	40.2844	60.01136	54.559	49.16830	66.5906
7.627	6.3600	4.9600	58.17113	40.4496	24.60160	48.508	31.54560	37.8299
5.927	4.8800	6.5670	35.09380	23.8144	43.12549	28.909	32.04696	38.9029
5.663	5.4340	0.6930	32.06957	29.5284	0.48025	30.773	3.76576	3.9245
7.463	6.0730	6.8330	55.69637	36.8813	46.68990	45.323	41.49681	50.9947
Σ: 54.686	**44.6329**	**41.2607**	**4433.5732**	**291.6881**	**279.70899**	**358.902**	**270.3915**	**338.635**
M: 7.8123	**6.376** **41.2607**							

$\Sigma y^2 = 16.13464$, $\Sigma x_1^2 = 7.10299$, $\Sigma x_2^2 = 36.50251$

$\Sigma x_1 y = 10.217$, $\Sigma x_2 y = 16.2946$, $\Sigma x_1 x_2 = 7.308$

$r_{y1} = 0.954$, $r_{y2} = 0.671$, $r_{12} = 0.45385$

$$b_1 = \frac{(\Sigma x_1 y)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_2 y)(\Sigma x_1 x_2)}{(\Sigma x_1^2)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2} = 1.233$$

$$b_2 = \frac{(\Sigma x_2 y)(\Sigma x_1^2) - (\Sigma x_1 y)(\Sigma x_1 x_2)}{(\Sigma x_1^2)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2} = 0.1995$$

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \overline{X_1} - b_2 \overline{X_2} = -1.226$$

$$R^2_{y.12} = \frac{b_1 \Sigma x_1 y + b_2 \Sigma x_2 y}{\Sigma y^2} = 0.982$$

$$S^2_{b_1} = \frac{(1-R^2)\, \Sigma y^2}{n-k-1} \cdot \frac{\Sigma x_2^2}{(\Sigma x_1^2)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2} = 0.0128$$

$S_{b_1} = 0.11346$ ، $t_1 = 10.867$

$S_{b_2} = 0.05005$ ، $t_2 = 3.99$

يتضح في الجدول رقم (2) أن مساهمة كلاً من العمل ورأس المال جوهرية من الناحية الإحصائية، ويمكن معرفة ذلك من مقارنة قيم t المحسوبة مع القيمة الجدولية $t_{(.05,4)} = 2.78$. ويبين معامل التحديد المتعدد $R^2_{y.12}$ أننا استطعنا تحديد (تفسير) 98% من الإختلافات الكلية في القيمة المضافة لناتج صناعة المواد الغذائية، من خلال معرفتنا بالإختلافات الكلية في العمل ورأس المال. أما معادلة الإنحدار المتعدد فهي:

$$\hat{Y} = -1.226 + 1.233\ X_1 + 0.1995\ X_2$$

ويقيس المعامل $b_1 = 1.233$، مرونة الناتج الصناعي بالنسبة للعمالة. فلو تغيرت العمالة بنسبة 10% (مع ثبات رأس المال)، فإن القيمة المضافة ستتغير بنسبة 12.3%. بينما يقيس المعامل $b_2 = 0.1995$، مرونة الناتج الصناعي بالنسبة لرأس المال. فلو تغير رأس المال بنسبة 10%، فإن القيمة المضافة لناتج صناعة المواد الغذائية ستتغير بنسبة 1.99%. وبالتالي فإن زيادة

كلاً من العمل ورأس المال بنسبة 10% في وقت واحد، سيؤدي إلى زيادة القيمة المضافة لناتج صناعة المواد الغذائية، في لبنان بنسبة 14.33% حيث أن

$$b_1 + b_2 = 1.233 + 0.1995 = 1.433$$

وبذلك نخلص، إلى أنه إذا تساوت الإستثمارات المنتجة في صناعة المواد الغذائية في منطقتين جغرافيتين مختلفتين في لبنان، لكن كان عدد العمال لهذه الصناعة في المنطقة الأولى أكبر من عدد العمال لهذه الصناعة في المنطقة الثانية، فإن نسبة الناتج الصناعي في المنطقة الأولى إلى الناتج الصناعي في المنطقة الثانية سيكون أكبر من نسبة عدد العمال في المنطقة الأولى إلى عدد العمال في المنطقة الثانية. وبنفس المنطق نفسر b_2، على أنه لو تساوى عدد العمال في صناعة المواد الغذائية في منطقتين جغرافيتين مختلفتين في لبنان، لكن كانت قيمة الإستثمار المنتج لهذه الصناعة في المنطقة الأولى أكبر من قيمة الإستثمار المنتج لهذه الصناعة في المنطقة الثانية، فإن نسبة الناتج الصناعي في المنطقة الأولى إلى الناتج الصناعي في المنطقة الثانية سيكون أكبر من نسبة الإستثمار المنتج في المنطقة الأولى إلى الإستثمار المنتج في المنطقة الثانية.

مثال (2): استخدام دالة كوب ـ دوغلاس للإنتاج في قياس المعدّل الحدي لإحلال العمل برأس المال المستثمر في القطاع الصناعي في لبنان:

يبين الجدول رقم (3) القيمة المضافة بآلاف الليرات اللبنانية، والإستثمارات المنتجة المحققة بآلاف الليرات اللبنانية، وعدد العاملين في القطاع الصناعي في لبنان لعام 1964[1]:

---

(١) مديرية الإحصاء المركزي «التعداد الصناعي في لبنان» لعام 1964. بيروت، لبنان.

الجدول رقم (3)
القيمة المضافة، الإستثمارات المنتجة، وعدد العمال في القطاع الصناعي لمجموع لبنان عام 1964

الصناعة	الإستثمارات المنتجة K	عدد العمال L	القيمة المضافة Q
صناعة المواد الغذائية (عدا المشروبات)	7028	6681	43344
صناعة المشروبات	3472	1556	16957
صناعة التبغ	2972	2033	40647
صناعة النسيج	6280	5277	24056
صناعة الأحذية والملبوسات والأغطية والبياضات	1387	4563	22089
صناعة الخشب والفلين عدا صناعة المفروشات	1964	1962	7707
صناعة المفروشات	3478	3918	17639
صناعة الورق ومنتجاته	544	610	5239
صناعة الطباعة والنشر	4424	3798	25176
صناعة الجلد والفرو	342	1112	7841
صناعة المطاط	174	276	1341
الصناعة الكيماوية	4722	1425	9919
صناعة مشتقات البترول	10612	775	17029
صناعة مستخرجات المناجم	8178	5731	42833
الصناعة الأساسية للمعادن	4932	921	4117
صناعة الأدوات المعدنية	7854	3132	19080
صناعة الآلات (ما عدا الآلات الكهربائية)	223	293	1827
صناعة الآلات الكهربائية	123	234	1706
صناعات معدات النقل	246	160	739
صناعات شتى غير مصنفة	422	527	3039
المجموع:	69376	44984	٪: 312327

ويتضح في الجدول رقم (4) تحويل القيم إلى صيغة لوغارتمية:

الجدول رقم (4)

تحويل متغيرات الجدول رقم (3) إلى صيغة لوغارتمية

LnL	LnK	LnQ
8.8070	8.8580	10.6769
7.3499	8.1530	9.7380
7.6173	7.9970	10.6127
8.5710	8.7450	10.0881
8.4257	7.2349	10.0028
7.5817	7.5827	8.9499
8.2733	8.1542	9.7779
6.4135	6.2989	8.5639
8.2422	8.3948	10.1336
7.0139	5.8348	8.9671
5.6204	5.1591	7.2012
7.2619	8.4599	9.2022
6.6529	9.2697	9.7427
8.6537	9.0092	10.6651
6.8255	8.5035	8.3229
8.0494	8.9688	9.8564
5.6802	5.4072	7.5104
5.4553	4.8122	7.4419
5.0752	5.5053	6.6053
6.2672	6.0450	8.0193

وباستخدام الطرق التي مرت معنا في الفصل الثاني نحصل على مصفوفة معاملات الإرتباط بين المتغيرات كالآتي:

مصفوفة معاملات الإرتباط بين متغيرات الجدول رقم (4)

	LnQ	LnL	LnK
LnQ	1.0000	0.9290	0.8300
LnL	0.9290	1.0000	0.7929
LnK	0.8300	0.7929	1.0000

يتضح في المصفوفة أعلاه، وجود علاقة قوية جداً بين المتغيرين المستقلين LnL و LnK، حيث أن $r_{LK} = 0.7929$. ونظراً لأن وجود العلاقة القوية بين المتغيرات المستقلة (Serious Multicollinearity) يسبب مشاكل في تحليل الإنحدار، ويُعطي تباين مرتفع لخطأ التقدير لمعامل الإنحدار، لذلك فمن الأفضل التخلص من مشكلة العلاقة القوية بين المتغيرات المستقلة في مثالنا أعلاه. ولا شك أن أفضل وسيلة لذلك هو إفتراض خضوع الإنتاج لقانون الغلة الثابتة $\alpha+\beta = 1$.

ويبين الجدول رقم (5)، تحويل متغيرات الجدول رقم (4) إلى صيغة تتلاءم مع فرضية خضوع الإنتاج لقانون الغلة الثابتة، مع العمليات الحسابية المناسبة:

الجدول رقم (5)

تحويل متغيرات الجدول رقم (4) إلى صيغة تتناسب مع فرضية خضوع الإنتاج لقانون الغلة الثابتة

X= LnL−LnK	Y= LnQ−LnK	Y^2	X^2	Y X
−0.05100	1.81890	3.30840	0.002601	−0.092764
−0.80310	1.58540	2.51350	0.644970	−1.273300
−0.37970	2.61570	6.8419	0.144200	−0.993180
−0.17400	1.34310	1.80392	0.030300	−0.233699
1.19080	2.76790	7.66130	1.41800	3.296020
−0.00104	1.36714	1.86910	0.000001	−0.014220
0.11910	1.62370	2.63640	0.014200	0.193380
0.11460	2.26500	5.13020	0.013130	0.259600
−0.15259	1.73881	3.02346	0.023280	−0.263330
1.17909	3.13229	9.81124	1.390250	3.693300
0.46130	2.04210	4.17020	0.212798	0.942000
−1.19809	0.74221	0.55090	1.435400	−0.889200
−2.61684	0.47296	0.22370	6.847900	−1.237700
−0.35500	1.65590	2.74200	0.126380	−0.588670
−1.67800	−0.18060	0.03260	2.815700	0.303050
−0.91937	0.88760	0.78780	0.845200	−0.816033
0.27300	2.10320	4.42350	0.074530	0.574200
0.64310	2.62970	6.91530	0.413580	1.691160
−0.43010	1.10000	1.21000	0.184990	−0.473000
0.22220	1.97430	3.89790	0.049400	0.438690
Σ: 33.68531 **M: 1.68427**	**−4.5655** **−0.2283**	**69.5533**	**16.6868**	**4.516304**

$$\Sigma\ y^2 = \Sigma\ Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{n} = 12.8183$$

$$\Sigma\ x^2 = \Sigma\ X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n} = 15.6446$$

$$\Sigma\ xy = \Sigma\ XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{n} = 12.205818$$

$$\beta_1 = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = 0.78$$

$$LnA = \overline{Y} - b_1\overline{X} = 1.8623$$

$$b_0 = anti - LnA = 6.44$$

$$R^2 = \frac{b\Sigma xy}{\Sigma y^2} = 0.742 \text{ ، } S\,S_{Resd} = \Sigma\ y^2\ (1-R^2) = 3.30712$$

$$S_b^2 = \frac{S\,S_{Resd}}{n-k-1} \cdot \frac{1}{\Sigma x^2} = 0.01174$$

$$S_b = 0.1084 \quad \text{،} \quad t = \frac{b}{S_b} = \frac{0.78}{0.1084} = 7.196$$

ويلاحظ في الجدول أعلاه، أن β لم تُعطى تعريفاً جديداً، لذلك لم نعمل على إعادة تحويلها كما فعلنا بالنسبة للثابت A. كما وأن اختبار t- يشير إلى أن قيمة معامل الإنحدار β جوهرية من الناحية الإحصائية. ونخلص إلى أن:

$$\beta = 0.78$$

$$1-\beta = 0.22$$

$$Q = 6.44\ L^{0.78}\ K^{0.22}$$

ويمكن تفسير المعادلة أعلاه، على أنه إذا زاد العمل بنسبة 10% فإن الناتج الصناعي يزيد بنسبة 7.8% ، في حين أن زيادة رأس المال بنسبة 10% سوف

يزيد الناتج بنسبة 2.2% (Ceteris paribus). علماً أن مرونة الناتج الصناعي في لبنان بالنسبة للعمالة $\beta=0.78$ ، أكبر من مرونة الناتج الصناعي بالنسبة للإستثمار المنتج $\alpha= 1-\beta = 0.22$. لكن زيادة العمل ورأس المال معاً، بنسبة 10% سيؤدي إلى زيادة الناتج الصناعي بنفس النسبة، ذلك لأن الإنتاج الصناعي لمجموع لبنان يخضع لقانون الغلة الثابتة. ويمكننا إيجاد المعدل الحدي للإحلال (The marginal rate of substitution) كالآتي[1]:

$$MRS = \frac{-\beta}{1-\beta} = \frac{-0.78}{1-0.78} = -3.55$$

بمعنى أنه يجب تعويض إنخفاض العمل بنسبة 10%، بزيادة في رأس المال المستثمر بنسبة 35.5%، وذلك حتى يبقى الناتج بدون تغيير. كذلك فإن:

$$MRS = \frac{-0.22}{1-0.22} = -0.28$$

بمعنى أنه يجب تعويض انخفاض الإستثمار بنسبة 10%، بزيادة في العمالة بمقدار 2.8% حتى يبقى الإنتاج عند مستواه السابق.

تجدر الإشارة أخيراً، إلى أنه يمكننا التنبؤ بالقيم المتوقعة للناتج الصناعي Q، وإيجاد فترة الثقة للناتج الصناعي Q وذلك بعد تحويل العمل ورأس المال إلى المتغيرات الجديدة، كما فعلنا في الجدول رقم (5)، حيث أن:

$$X = LnL - LnK$$

وبعد استبدال X في معادلة الإنحدار، يتوجب علينا تحويل Y إلى Q.

---

(1) Dernburg & Dernburg., PP: 176-178.

الدالة الأسية للنمو (The exponential growth curve) :

كثيراً ما يستخدم الباحث المقياس الحسابي (Arithmetic scale) في رسم السلاسل الزمنية (Time series data)، حيث يكون المقياس على المحور Y متناسباً مع القيم المطلقة (Absolute amount) للمتغير التابع Y. فلو فرضنا أن المتغير التابع Y يأخذ القيم 100، 110، 120و 130خلال أربع سنين، فإننا نلاحظ أن التغير المطلق (Absolute change) هو ثابت من سنة إلى أخرى (10 = 100-110 و 10 = 110-120 . . . الخ)، ويمكننا استخدام معادلة الخط المستقيم لوصف التغيرات المطلقة الثابتة في المتغير التابع عبر الزمن. الجدير بالذكر، أنه تصادف الباحث حالات لا يهتم فيها بالتغيرات المطلقة للمتغير التابع وإنما يهمه فيها دراسة التغيرات النسبية (Proportional change) في المتغير التابع. فلو فرضنا أن عدد سكان لبنان إزداد من أربعة ملايين، إلى أربعة ملايين ومائة ألف، في حين زاد سكان بلدٍ آخر من سبعة ملايين إلى سبعة ملايين ومائة ألف، فإننا نلاحظ أن عدد السكان زاد بقيمة مائة ألف في البلدين. وهنا نتساءل فيما إذا كان لهذه الزيادة المطلقة نفس الأهمية في البلدين؟. لا شك أنه يتوجب علينا مقارنة نسبة الزيادة في السكان، ذلك لأن زيادة السكان بمقدار 100 ألف نسمة، تعني أن سكان البلد الأول زادوا بنسبة 2.5%، في حين زاد سكان البلد الثاني بنسبة 1.4%. ولمعرفة فيما إذا كان المتغير التابع يتزايد أو يتناقص بمعدل نسبي ثابت، أو بمعدل نسبي متغير، يلجأ الباحث عادةً إلى استخدام المقياس الحسابي نصف اللوغارتمي (Semi-logarithmic scale graph). فإذا ظهرت السلسلة الزمنية على هذا الرسم في شكل خط مستقيم، أمكن القول حينئذٍ أن المتغير Y **ينمو بمعدل ثابت** خلال الزمن. وبدلاً من استخدام الرسم البياني نصف اللوغارتمي، فإن باستطاعة الباحث أن يرسم LnY بدلاً من Y مع الزمن، فإذا حصل على خط مستقيم، علم حينئذٍ أن الدالة المناسبة لبياناته هي الدالة الأسية للنمو.

الجدير بالذكر أن دالة النمو (The growth function) تشبه معادلة الفائدة المركبة، فلو رمزنا إلى عدد السكان في بداية الفترة بالرمز Y_0، ورمزنا للسكان في السنة الأولى بالرمز Y_1 .... وفي السنة X بالرمز Y_x، ورمزنا إلى معدل النمو بالرمز i، فحينئذٍ نلاحظ أن عدد السكان في بداية الفترة يساوي $Y_0=b_0$، وفي السنة الأولى يساوي $Y_1= b_0(1+i)^1$، وفي السنة X فإنه يساوي إلى[1]:

$$Y_0 = b_0$$

$$Y_1 = b_0 + b_0 i = b_0(1+i)^1$$

$$Y_2 = b_0 (1+i) + b_0 (1+i)i = b_0(1+i) (1+i) = b_0 (1+i)^2$$

$$Y_x = b_0 (1+i)^x$$

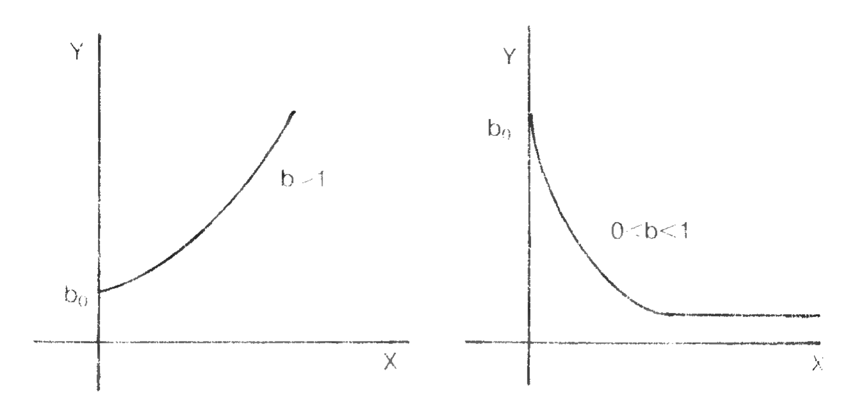
دعنا نعرّف الحد (1+i) على أنه b_1، فتصبح معادلة الإنحدار:

$$Y = b_0 b_1^x V$$

حيث ترمز V إلى المتغير العشوائي (The error term)، وتمثل الدالة أعلاه دالة النمو التي تستخدم في الإقتصاد القياسي، علماً أن شكل المنحنى الأسي يتوقف على قيم b_1 و b_0. فإذا كانت b_1 أكبر من الواحد الصحيح حصلنا على منحنى النمو حيث تزيد Y بتزايد الزمن، وإذا كانت b_1 أصغر من الواحد الصحيح حصلنا على منحنى (Decay curve) حيث تتناقص Y مع تزايد الزمن، أما b_0 فهي قيمة الثابت لتقاطع المنحنى مع المحور Y[2].

(1) Snedecor and Cochran., «Statistical Methods». The 6th ed., The IOWA State University pres., 1967, PP: 447-453.

(2) Harnett and Murphy., «Introductory Statistical Analysis». Addison-Wesley publishing company. Inc., 1975, PP: 486-491.



من الملاحظ أن الدالة:

$$Y = b_0 \; b_1^x v$$

هي دالة غير خطية (Nonlinear)، فهي أسية (Exponential) من ناحية، وتتضمن ضرب للحدود بدلاً من الجمع (Product of terms instead of sum of terms) من ناحية أخرى، ويمكن للباحث تحويلها إلى صيغة خطيـة باستخدام اللوغارتمات*:

$$LnY = Ln\ (b_0 b_1^x v)$$

$$LnY = Lnb_0 + X\ Lnb_1 + Lnv$$

وتجدر الإشارة أخيراً إلى أنه تسهيلاً للعمليات الحسابية فإنه باستطاعة الباحث ترميز السنين. فبدلاً من استخدام السنين 1970، 1971، 1972، فباستطاعة الباحث استخدام الرموز 0، 1، و 2 تبسيطاً للعمليات الحسابية. علماً أن أفضل طريقة لترميز السنين هي تلك التي تجعل $\Sigma x=0$ ، ويتم ذلك بأخذ السنين في شكل إنحرافات عن الوسط الحسابي، فتُعطى السنة الوسطى في السلسلة الزمنية الرمز 0، وتُعطى السنين التي تسبقها الرموز 1−، 2−، 3−، بينما تُعطى السنين التي تليها الرموز 1، 2، 3 ... الخ. آخذين في

* يتميز المتغير العشوائي LnV بأنه يمتلك ذات الفروض والخصائص التي مرت معنا للمتغير العشوائي U. وأهمها $U \sim N(0, \sigma^2)$.

الإعتبار ضرورة التمييز بين البيانات لعدد مزدوج من السنين، أو لعدد مفرد من السنين، ففي حالة العدد المزدوج من السنين فإن الرمز 0 يقع بين السنتين الوسطى لذلك نستعمل الرموز 0.50−، 1.50−، 2.5− للسنين السابقة والرموز 0.5، 1.5، 2.5 للسنين اللاحقة، علماً أنه (تسهيلاً للعمليات الحسابية) يمكننا ضرب الترميز الأخير بالعدد 2 فنحصل على الرموز 1−، 3−، 5− و 1، 3، 5 . . الخ. ويتضح في المثالين التاليين تطبيقاً لدوال النمو حيث نستخدم في المثال (3) عدداً مفرداً من السنين، بينما نستخدم في المثال (4) عدداً مزدوجاً من السنين.

أمثلة تطبيقية:

مثال (3): دراسة الإتجاه العام لنمو السكان في دولة قطر:

يوضح الجدول رقم (6) عدد السكان في دولة قطر للفترة 1970-1976*:

الجدول رقم (6)
عدد السكان في دولة قطر (بالألف)

السنين: X	1976	1975	1974	1973	1972	1971	1970
السكان (ألف): P	185	170	156	143	132	120	111

* اللجنة الإقتصادية لغربي آسيا، «المجموعة الإحصائية لمنطقة اللجنة الإقتصادية لغربي اسيا 1970-1979» عام 1981 ص: 302، العدد الرابع بيروت

ويوضح الجدول رقم (7) العمليات الحسابية للحصول على معدل نمو السكان باستخدام دالة النمو:

الجدول رقم (7)

السكان $Y = LnP$	السنين X	YX	Y^2	X^2
4.7095	−3	−14.1285	22.1794	9
4.7875	−2	−9.5750	22.9202	4
4.8828	−1	−4.8828	23.8417	1
4.9628	0	0	24.6294	0
5.0498	1	5.0498	25.5005	1
5.1358	2	10.2716	26.3764	4
5.2204	3	15.6612	27.2526	9
Σ: 34.7486	**0**	**2.3963**	**172.7047**	**28**
M: 4.9641	**0**			

$$\Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{n} = 0.206$$

$$a = \overline{Y} = 4.9641$$

$$b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = 0.0856$$

$$\text{Anti}-a = b_0 = 143.18$$

$$\text{Anti}-b = b_1 = 1.0894$$

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma y^2 \; \Sigma x^2}} = 0.9999$$

$$r^2 = 0.997$$

أما معادلة نمو السكان في دولة قطر فهي كالآتي:

$$P = (143.18)\ (1.0894)^{x}$$

علماً أننا كنّا قد عرفنا b كالآتي:

$$b = (1+i)$$

إذن:

$$i = b-1 = 1.0894-1 = 0.0894$$

بمعنى أن السكان يتزايدون بمعدل 8.94% في السنة*. وتدل $r^2=0.99$ على جودة التوفيق للمعطيات. ويمكن استخدام المعادلة أعلاه في توقع السكان لأي عام. ففي عام 1976 تكون القيمة المتوقعة للسكان، كالآتي:

$$\hat{Y} = (143.18)\ (1.0894)^{3} = 185.11$$

مثال (4): دراسة الاتجاه العام لنمو الواردات في السعودية:

يوضح الجدول رقم (8) قيم الإستيرادات في السعودية للفترة 1970-1979:

---

* تجدر الإشارة إلى أن معادلة النمو تربط بين لوغاريتمات قيم المتغير التابع وبين قيم المتغير المستقل (الزمن) بدون لوغاريتمات، لذلك نسمي هذه المعادلة بالمعادلة نصف اللوغارتمية، حيث تمثل i معدل النمو في Y خلال الفترة الزمنية X. وتختلف دالة النمو، عن الدالة اللوغارتمية الكاملة (كوب - دوجلاس)، في أن الأخيرة تربط بين لوغاريتمات المتغير التابع ولوغاريتمات المتغيرات المستقلة، لذلك تدل α و β على المرونة، أي التغير النسبي في Y الذي يترتب على تغير نسبي معين في L أو K.

الجدول رقم (8)
قيم الاستيرادات (سيف) في السعودية بالمليون ريال [1]

السنين : X	1979	1978	1977	1976	1975	1974	1973	1972	1971	1970
الواردات : I	93331.6	64297.6	51662.0	30690.7	14823.1	10149.2	7197.0	4708.3	3667.5	3196.8

---

(1) الأمم المتحدة، اللجنة الاقتصادية لغربي آسيا. «المجموعة الإحصائية لمنطقة اللجنة الاقتصادية لغربي آسيا للفترة 1979 - 1970»، ص: 355، العدد الرابع. بيروت - لبنان.

وتتضح العمليات الحسابية لاحتساب معدل نمو الواردات في السعودية في الجدول رقم (9) :

الجدول رقم (9)

Y = LnI	x	Yx	x^2	Y^2
8.06990	—9	—72.6291	81	65.12329
8.20720	—7	—57.4504	49	67.35813
8.45710	—5	—42.2855	25	71.5226
8.44140	—3	—26.6442	9	78.8793
9.22520	—1	—9.2252	1	85.1043
9.60394	1	9.60394	1	92.2357
10.33170	3	30.9951	9	106.744
10.85250	5	54.2625	25	117.7768
11.07130	7	77.4991	49	122.5737
11.44391	9	102.9953	81	130.9632
Σ: 96.144154	**0**	**67.12154**	**330**	**938.2747**
M: 9.6144	**0**			

$$a = \overline{Y} = 9.61442$$

$$b = \frac{\Sigma Yx}{\Sigma x^2} = 0.2034$$

$$\Sigma y^2 = 13.904865$$

$$r = \frac{\Sigma yx}{\sqrt{\Sigma x^2 \; \Sigma y^2}} = 0.99088$$

$$r^2 = 0.982$$

$$\text{Anti - } a = b_0 = 14979.23$$

$$\text{Anti - } b = b_1 = 1.226$$

إذن معادلة نمو الاستيرادات في السعودية*:

$$I = (14979.23)\ (1.226)^x$$

بمعنى أن الاستيرادات تنمو بمعدل 23% كل نصف سنة، آخذين في الاعتبار أن X مقاسة في شكل نصف سنة. ولو أننا استخدمنا الرموز 1.50 —، 2,50 — و 0.50 +، 1.50 +، 2.50 + . . . الخ، لكانت X مقاسة بالسنة ولحصلنا على $b = 0.4148$، وعلى $b_1 = \text{Anti-b} = 1.514$.

المعادلة من الدرجة الثانية:

قد يحتاج الباحث في مجال الاقتصاد إلى استخدام المعادلة من الدرجة الثانية (A second degree porabola) وهي على الشكل الآتي:

$$Y = b_0 + b_1X + b_2X^2$$

وتُمَثِّل هذه المعادلة بخط بياني له التواء واحد، فيكون محدباً إذا كانت b_2 سالبة، ويكون مقعراً إذا كانت b_2 موجبة في المعادلة. الجدير بالذكر، أنه توجد حالات قليلة في الاقتصاد حيث يضطر الباحث فيها إلى استخدام مثل هذه

* تجدر الإشارة إلى أن معادلة الانحدار الخطي البسيط للبيانات أعلاه:

$$I = 28372.28 + 4683.48X$$

$$r^2 = 0.82$$

المعادلة. ومثال ذلك توفيق معادلة الاتجاه العام لبيانات زمنية تتزايد (أو تتناقص)، بقيم متزايدة (أو متناقصة). ومثال ذلك أيضاً دالة التكاليف (The U-Shaped cost function)، حيث نلاحظ أنه مع تزايد الناتج الكلي (Total output)، فإن النفقات الحدية (The marginal cost) تتناقص في البداية ثم تأخذ في التزايد(1).

بالرغم من أن المعادلة من الدرجة الثانية، هي معادلة غير خطية في المتغيرات (Nonlinear in variables)، حيث تحتوي المعادلة على X^2، فإنه يمكن تحويل هذه المعادلة إلى معادلة انحدار خطي متعدد. وذلك بإعطاء المتغير X^2 تعريفاً جديداً وليكن $X^2 = X_2$. فتصبح المعادلة أعلاه كالآتي:*

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$$

مثال (5): دراسة الاتجاه العام لانتاج الأبقار في سوريا:

يوضح الجدول رقم (10) انتاج الأبقار في سوريا (بالألف رأس) للفترة 1970-1979، بينما يوضح الجدول رقم (11) توفيق معادلة من الدرجة الثانية لدراسة الاتجاه العام لإنتاج الأبقار :

(1) Wonnacott and wonnacott, pp:87-91.

* تجدر الاشارة إلى أن معادلة الاتجاه الخطي البسيط تفترض أن المتغير ينمو بمقدار سنوي ثابت: $\hat{Y}_t - \hat{Y}_{t-1} = b$، في حين تفترض الدالة الأسية أن الزيادة السنوية تكون ثابتة لذلك فإن: $\hat{Y}_t \div \hat{Y}_{t-1} = b$. أما في معادلة الدرجة الثانية فنلاحظ أن الفروقات الثانية للقيم المتوقعة تكون ثابتة، كالآتي:

$$(\hat{Y}_t - \hat{Y}_{t-1}) - (\hat{Y}_{t-1} - \hat{Y}_{t-2}) = 2b_2$$

الجدول رقم (10)

إنتاج الأبقار (ألف رأس) في سوريا للفترة 1979 - 1970:[1]

السنين : X	1979	1978	1977	1976	1975	1974	1973	1972	1971	1970
انتاج الأبقار : Y	760	694	639	574	557	524	494	488	506	529

(1) اللجنة الاقتصادية لغربي آسيا. «المجموعة الإحصائية لمنطقة اللجنة الاقتصادية لغربي آسيا 1979 - 1970»، العدد الرابع، عام 1981، ص: 394 بيروت - لبنان.

الجدول رقم (11)

السنين	$X_1 = x$	$X_2 = x^2$	Y	Y^2	X_1^2	X_2^2	YX_1	YX_2	X_1X_2
1970	-9	81	529	279841	81	6561	-4761	42849	-729
1971	-7	49	506	256036	49	2401	-3542	24794	-343
1972	-5	25	488	238144	25	625	-2440	12200	-125
1973	-3	9	494	244036	9	81	-1482	4446	-27
1974	-1	1	524	274576	1	1	-524	524	-1
1975	1	1	557	310249	1	1	557	557	1
1976	3	9	574	329476	9	81	1722	5166	27
1977	5	25	639	408321	25	625	3195	15975	125
1978	7	49	694	481636	49	2401	4858	34006	343
1979	9	81	760	577600	81	6561	6840	61560	729
Σ:	**0**	**330**	**5765**	**3399915**	**330**	**19338**	**4423**	**202077**	**0**
M:	**0**	**33**	**576.5**						

$$\Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{n} = 76392.5$$

$$\Sigma x_1^2 = \Sigma X_1^2 - \frac{(\Sigma X_1)^2}{n} = 330$$

$$\Sigma x_2^2 = \Sigma X_2^2 - \frac{(\Sigma X_2)^2}{n} = 8448$$

$$\Sigma x_1 y = \Sigma X_1 Y - \frac{(\Sigma X_1)(\Sigma Y)}{n} = 4423$$

$$\Sigma x_2 y = \Sigma X_2 Y - \frac{(\Sigma X_2)(\Sigma Y)}{n} = 11823$$

$$\Sigma x_1 x_2 = \Sigma X_1 X_2 - \frac{(\Sigma X_1)(\Sigma X_2)}{n} = 0$$

$$r_{y1} = \frac{\Sigma x_1 y}{\sqrt{\Sigma x_1^2 \, \Sigma y^2}} = 0.880916$$

$$r_{y2} = \frac{\Sigma x_2 y}{\sqrt{\Sigma x_2^2 \, \Sigma y^2}} = 0.4657532$$

$$r_{12} = \frac{\Sigma x_1 x_2}{\sqrt{\Sigma x_1^2 \, \Sigma x_2^2}} = 0$$

$$b_1 = \frac{37365504 - 0}{2787840 - 0} = 13.4030303$$

$$b_2 = \frac{3904560 - 0}{2787840 - 0} = 1.40057$$

$$b_0 = 576.5 - 0 - (1.40057)\ (33) = 530.28$$

$$R^2 = \frac{(13.4030303)\ (4423) + (1.40057)\ (11823)}{76392.5} = 0.993$$

$$R^2 = (0.880916)^2 + (0.4657532)^2 = 0.993$$

$$SS_{Resd} = (1 - 0.993)\ (76392.5) = 551.958$$

$$S_{b_1} = \sqrt{\frac{551.958}{10\text{-}2\text{-}1} \cdot \frac{8448}{278784}} = 0.49$$

$$S_{b_2} = \sqrt{\frac{551.958}{10\text{-}2\text{-}1} \cdot \frac{330}{278784}} = 0.0966$$

$$t_1 = \frac{b_1}{S_{b1}} = \frac{(13.4030303)}{0.49} = 27.353$$

$$t_2 = \frac{b_2}{S_{b_2}} = \frac{(1.40057)}{0.0966} = 14.499$$

يتضح في الجدول رقم (11) أن b_2 جوهرية من الناحية الإحصائية، ويشير معامل التحديد المتعدد $R^2 = 0.993$ إلى جودة توفيق المنحنى للبيانات. أما $b_0 = 530$ فيشير إلى القيمة المتوقعة لإنتاج الأبقار (بالألف رأس) عندما

$X = 0$ أي عند كانون الثاني (January) عام 1975، ويشير $b_1 = 13.40$ إلى ميل المنحنى عندما $X = 0$، بينما تشير $b_2 = 1.40$ إلى القيمة التي يتغير بها ميل المنحنى كل نصف سنة.

دالة التفضيل النقدي لكينز: (The Keynesian liquidity preference equation)

لا شك أن دالة تفضيل السيولة لكينز هي دالة غير خطية في المتغيرات. حيث يرى كينز أن سعر الفائدة دالة متناقصة في كمية النقود التي يطلبها الأفراد للاحتفاظ بها في شكل سائل من مستوى معين من الدخل، أما الصيغة الرياضية لهذه الدالة فهي:

$$Y = \alpha + \beta \left(\frac{1}{L - L^*}\right)$$

حيث تمثل Y سعر الفائدة، في حين تمثل L كمية النقود، أما L^* فتمثل ذلك الجزء من كمية النقود والمستقل عن التأثر بسعر الفائدة وهو ما يعرف بالطلب على النقود للمبادلات (The transaction demand for money). وبالتالي فإن $L - L^*$ تمثل الطلب على النقود للمضاربة (The speculative demand for money). ويمكن تحويل هذه الدالة إلى دالة خطية، واستخدام تحليل الانحدار الخطي البسيط وذلك بتعريف $x = \frac{1}{L - L^*}$ فتصبح المعادلة:

$$Y = \alpha + \beta x$$

حيث تمثل α مصيدة السيولة (The liquidity Trap). أي الحد الأدنى لسعر الفائدة والذي لا يمكن لسعر الفائدة أن ينخفض دونه. الجدير بالذكر أن تطبيق المعادلة أعلاه يصادف صعوبة في قياس المتغير X، ذلك لأن L كمية النقود سهلة الإيجاد لكن الكمية $L - L^*$ صعبة الإيجاد نظراً لصعوبة احتساب الطلب على النقود للمبادلات بدقة[1].

(1) Wonnacott & Wonnacott, pp:82 - 86.

الفصل السادس
توسيع استخدام طريقة المربعات الصغرى

تمهيد:

لقد سبق وذكرنا، أن تحليل الإنحدار يعتمد على فروض خاصة يقوم عليها إدخال المتغير العشوائي في التحليل. وأهم هذه الفروض هو أن:

$$Var\ (U) = \sigma^2\ \mathbf{I}$$

أي أن تباين المتغير العشوائي يساوي إلى التباين الثابت للمجتمع الإحصائي مضروباً بالمصفوفة المتطابقة **I**. ولتوضيح ذلك، دعنا في الخطوة الأولى نعرّف مصفوفة التباين والتغاير (The Variance-Covariance Matrix) للمتغير X، فمن المعلوم أن تباين المتغير X هو:

$$Var\ (X) = E\ [X - E\ (X)]^2$$

وإذا كان لدينا الموّجه العشوائي (Random vector) X وفيه متغيرين مثلاً X_1 وX_2، فإن:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \\ X_2 \end{bmatrix}$$

أما تباين هذا الموّجه فهو[1]:

$$Var(X) = E\ [X - E\ (X)]^2 = E\ [X - E\ (X)]\ [X - E\ (X)]'$$

(1) Yamane, PP: 952-954.

إذن:

$$Var(X) = E\begin{bmatrix} X_1 - E(X_1) \\ X_2 - E(X_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - E(X_1) & X_2 - E(X_2) \end{bmatrix}$$

$$Var(X) = \begin{bmatrix} E[X_1 - E(X_1)]^2 & E[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)] \\ E[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)] & E[X_2 - E(X_2)]^2 \end{bmatrix}$$

$$Var(X) = \begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_1, X_2) & Var(X_2) \end{bmatrix}$$

علماً أن المصفوفة أعلاه تضمنت على X_1 و X_2للتبسيط، ويمكن توسيع المصفوفة أعلاه لتشتمل على K من المتغيرات المستقلة. ويمكننا بنفس المنطق تعريف مصفوفة التباين والتغاير للمتغير العشوائي U. فإذا فرضنا للتبسيط أنه لدينا ثلاثة مشاهدات، فباستطاعتنا حينئذٍ وضع المتغير العشوائي في صيغة موّجه عشوائي كالآتي:

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U'_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

أما تباين المتغير العشوائي فهو:

$$Var(U) = E(UU')$$

$$Var\ (U) = E \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} [U_1 \quad U_2 \quad U_3]$$

$$Var\ (U) = \begin{bmatrix} Var\ (U_1) & Cov\ (U_1, U_2) & Cov\ (U_1, U_3) \\ Cov\ (U_1, U_2) & Var\ (U_2) & Cov\ (U_2, U_3) \\ Cov\ (U_1, U_3) & Cov\ (U_2, U_3) & Var\ (U_3) \end{bmatrix}$$

ونظراً لأن تحليل الإنحدار يقوم أساساً على إفتراض ثبات تباين المتغير العشوائي، وعلى افتراض إنعدام العلاقة بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي :

$$Var\ (U_1) = Var\ (U_2) = Var\ (U_3) = \sigma^2$$

$$Cov\ (U_iU_j) = 0$$

فإن المصفوفة أعلاه تصبح كالآتي:

$$Var(U) = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{I}$$

أي أن تباين المتغير العشوائي يساوي إلى حاصل ضرب التباين الثابت للمتغير التابع في المجتمع الإحصائي بالمصفوفة المتطابقة.

الجدير بالذكر، أنه كثيراً ما يصادف الباحث في مجال البحوث التطبيقية أن تكون:

$$Var\ (U) \neq \sigma^2 \mathbf{I}$$

وبمعنى أدق فإنه كثيراً ما يُواجَه الباحث في مجال الإقتصاد القياسي بمخالفة الفروض الأساسية التي يعتمد عليها إدخال المتغير العشوائي في تحليل الإنحدار، فيُثار التساؤل عندئذٍ عما يحدث للخصائص الإحصائية لمعاملات الإنحدار؟ علماً أنه يمكن لتباين المتغير العشوائي، أن يساوي قيمة مختلفة عن $\sigma^2 I$، وذلك في حالتين معروفتين في الإقتصاد القياسي بحالة الإرتباط المتسلسل الذاتي، وحالة عدم ثبات التباين في المجتمعات الفرعية.

ففي الحالة الأولى، تتساوى القيم القطرية في المصفوفة $\sigma^2 I$، لكن تكون القيم خارج القطر غير مساوية للصفر بسبب وجود التغاير بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي. وتعرف هذه الحالة بالإرتباط المتسلسل الذاتي (Serial-or auto-correlation).

أما في الحالة الثانية، ففيها لا تتساوى القيم القطرية في المصفوفة $\sigma^2 I$، بينما تكون القيم خارج القطر مساوية للصفر، وهي ما تعرف بحالة عدم ثبات التباين في المجتمعات الفرعية (Heteroscedasticity).

الجدير بالذكر، أنه سواءً أكان يعاني النموذج الإقتصادي من مخالفة فرضية إنعدام التغاير بين قيم المتغير العشوائي، أو كان يعاني من مخالفة فرضية ثبات التباين في المجتمعات الفرعية، فإننا سوف نحصل على تقديرات خطية غير متحيزة (Unbiased linear estimates) لمعاملات الإنحدار، لكن ستكون هذه التقديرات غير كفوءة (Inefficient) [1]. وبمعنى أدق، فإن انتشار $b_0 + b_1 X$ حول خط الإنحدار للمجتمع الإحصائي $\alpha + \beta X$، لن يكون أقل من انتشار $C_0 + C_1 X$ والتي تمّ الحصول عليها بطريقة أخرى غير طريقة المربعات الصغرى. وبالتالي، فإن الخطأ المعياري لتوزيع المعاينة لمعاملات الإنحدار، سيكون كبيراً، مما يؤدي إلى إعطاء نتائج مضللة لكلٍ من فترة الثقة، واختبار

(1) Wonnacott and Wonnacott, P: 138.

الفروض. فيزيد احتمال ارتكاب الخطأ من النوع الأول (Type I error) أو احتمال ارتكاب الخطأ من النوع الثاني (Type I I error) في إتخاذ القرار الإحصائي. لذلك، فلا بدّ للباحث، وقبل استخدام طريقة المربعات الصغرى، من إجراء التحويلات (Transformation) المناسبة لمتغيرات النسوذج الإقتصادي، حتى يتمكن من الحصول على معاملات الإنحدار الكفوءة. وسنتناول هاتين الحالتين بالتفصيل.

الحالة الأولى:

مخالفة فرضية إنعدام التغاير بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي:

تؤدي مخالفة فرضية إنعدام التغاير بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي، إلى معاناة النموذج الإقتصادي من وجود الإرتباط المتسلسل الذاتي. علماً أن أكثر البيانات الإقتصادية للسلاسل الزمنية تعاني من مشكلة وجود الإرتباط بين قيم المتغير العشوائي في الفترة t، وبين قيم المتغير العشوائي في الفترات السابقة للفترة t مثل t−1، t−2 . . الخ. دعنا للتبسيط، نفترض أن انتاج الفولاذ (Steel production) في الفترة t (Y_t)، دالة للسكان (Population) (X_t)، كالآتي.

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + U_t$$

حيث يقيس المتغير العشوائي U_t أثر المتغيرات المستقلة الأخرى (غير السكان)، على انتاج الفولاذ، والتي لم نتمكن من قياسها وإدخالها بشكل صريح في النموذج، ومثال ذلك الوضع الإقتصادي السائد في الفترة t، . . . الخ.

ونظراً لأن الوضع الإقتصادي السائد في الفترة t، يتأثر إلى حدٍ بعيد بالوضع الإقتصادي الذي كان سائداً في الفترات t−1 ، t−2 ، t−3 . . الخ. ويؤثر إلى حدٍ بعيد بالوضع الإقتصادي الذي سوف يسود في الفترة t+1 و t+2

لذلك، لم يعد باستطاعتنا إفتراض إنعدام العلاقة بين القيم U_t، U_{t-1}، U_{t-2}، U_{t+1} . . الخ ، وبما أن استخدام طريقة المربعات الصغرى في تحليل الإنحدار يفترض إنعدام وجود مثل هذه العلاقة، لذلك يتوجب على الباحث، وقبل تطبيق طريقة المربعات الصغرى على البيانات الزمنية، أن يختبر وجود الإرتباط المتسلسل الذاتي في بياناته. فإن وجد علاقة بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي، توجب عليه عندئذٍ تحويل المتغيرات إلى صيغة أخرى، تكون نتيجتها إنعدام مثل هذه العلاقة. ويمكن للباحث اختبار وجود الإرتباط المتسلسل الذاتي في بيانات النموذج باستخدام .اختبار دوربون ـ وتسون (Durbin and Watson Test).

اختبار دوربون ـ واتسون:

يُستخدم اختبار دوربون ـ وتسون في الإقتصاد القياسي، لإكتشاف وجود العلاقة بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي في بيانات السلاسل الزمنية. فإذا كان المتغير Y دالة للمتغير X في بيانات زمنية، فإننا نلاحظ أن:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + U_t \qquad \text{I}$$

$$U_t = r\, U_{t-1} + V_t \qquad \text{II}$$

حيث تشير المعادلة II إلى أن قيم المتغير العشوائي في الفترة (t)دالة لقيم المتغير العشوائي في الفترة السابقة (t−1)، مفترضين في ذلك أن المتغير العشوائي (V_t) لا يتعارض مع فرضيات الإنحدار وطريقة المربعات الصغرى في التقدير. وبما أن المتغير العشوائي (V_t) لا يتنافى مع الفروض الخاصة بالمتغير العشوائي في تحليل الإنحدار، لذلك يتوجب على الباحث استبدال المتغير (U_t) في المعادلة I بالمتغير (V_t) من المعادلة II. فمن المعلوم أن:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + U_t \qquad (1)$$

وبما أن هذه المعادلة صالحة للفترة t فإنها ستكون من الناحية المنطقية صالحة للفترة t−1، كالآتي:

$$Y_{t-1} = \alpha + \beta X_{t-1} + U_{t-1} \qquad (2)$$

آخذين في الإعتبار وجود علاقة بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي، كالآتي:

$$U_t = r\, U_{t-1} + V_t$$

$$U_t - r\, U_{t-1} = V_t \qquad (3)$$

وإذا افترضنا أن قيمة r=1.0، فحينئذٍ تصبح المعادلة (3) كالآتي:

$$U_t - U_{t-1} = V_t \qquad (4)$$

وبطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نحصل على:

$$Y_t - Y_{t-1} = \beta (X_t - X_{t-1}) + (U_t - U_{t-1}) \qquad (5)$$

وباستبدال الحد الأخير في المعادلة (5) بقيمته من المعادلة (4) نحصل على:

$$\triangle Y_t = \beta \triangle X_t + V_t \qquad (6)$$

علماً أن:

$$\triangle X_t = X_t - X_{t-1} \quad \text{و} \quad \triangle Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

وبما أن المتغير العشوائي V_t في المعادلة (6) لا يتنافى مع الفروض الخاصة بإدخال المتغير العشوائي في معادلة الإنحدار، لذلك فباستطاعة الباحث استخدام طريقة المربعات الصغرى الإعتيادية (OLS) في تقدير معاملات الإنحدار، وبالتالي تقدير قيم $\triangle Y_t$ من القيم المناظرة $\triangle X_t$، في المعادلة (6)[1].

الجدير بالذكر، أن إفتراض مساواة قيمة r للواحد الصحيح في المعادلة

---

(1) Yamane, P: 1006.

(6)، يؤدي إلى ظهور مشكلة جديدة تتضمن على تزايد تباين المتغير العشوائي U_t عبر الزمن إلى ما لا نهاية (Infinity)، وهو ما يعرف بالـ (Explosive error)، لذلك يتوجب علينا افتراض قيمة أقل من الواحد الصحيح للمعامل r، فنحصل بذلك على تباين للمتغير العشوائي U_t مستقل عن الزمن وهو ما يعرف بالـ (Stationary error)[1]. وللتخلص من هذه المشكلة، دعنا نعيد صياغة المعادلتين (1) و (2):

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + U_t \qquad (1)$$

$$Y_{t-1} = \alpha + \beta X_{t-1} + U_{t-1} \qquad (2)$$

وبضرب طرفي المعادلة (2) بالمعامل r، وطرح الناتج من المعادلة (1)، نحصل على:

$$Y_t - r\, Y_{t-1} = \alpha\, (1-r) + \beta\, (X_t - r\, X_{t-1}) + (U_t - r\, U_{t-1})$$

وباستبدال الحد الأخير من المعادلة أعلاه بقيمته من المعادلة (3) نحصل على:

$$Y_t - r\, Y_{t-1} = \alpha\, (1-r) + \beta\, (X_t - r\, X_{t-1}) + V_t$$

إذن:

$$Y_t = \alpha\,(1-r) + rY_{t-1} + \beta\, X_t - \beta\, r\, X_{t-1} + V_t \qquad (7)$$

وهي المعادلة المطلوبة، ذلك لأن المتغير العشوائي V_t لا يتنافى مع الفروض الخاصة بإدخال المتغير العشوائي في تحليل الإنحدار. ويمكن تلخيص ما سبق ذكره، بأن البيانات الزمنية لأية ظاهرة اقتصادية، تُعاني من مشكلة وجود ارتباط بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي، مما يُحد من استخدام طريقة المربعات الصغرى في تقدير معالم النموذج. وحتى يتمكن الباحث من تقدير

---

(1) Wonnacott and Wonnacott, P: 141.

معالم النموذج، فلا بدّ له من تحويل المتغيرات إلى صيغة أخرى تكون نتيجتها إنعدام العلاقة بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي، كما هو مبين في المعادلة رقم (7).

وأخيراً، تجدر الإشارة إلى أنه يتوجب على الباحث وقبل تحويل المتغيرات إلى الصيغة الموضحة في المعادلة رقم (7)، أن يختبر وجود العلاقة بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي، فإن وُجدت هذه العلاقة، توجب عليه عندئذٍ، تقدير قيمة المعامل r حتى يتمكن من استخدام الصيغة الموضحة في المعادلة رقم (7).

ولإختبار وجود العلاقة بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي، فقد اقترح دوربون ـ وتسون استخدام الإحصائية:

$$d = \frac{\Sigma\ (\ell_t - \ell_{t-1})^2}{\Sigma\ \ell_t^2}$$

علماً أن قيمة d ستكون محصورة بين (0) و (4)، حيث لا يوجد ارتباط بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي إذا كانت قيمة d قريبة من 2 . ولقد أوجد دوربون ـ وتسون لوائح إحصائية خاصة بهذا الإختبار، حيث يمكن للباحث ومن مقارنة القيمة المحسوبة d مع القيمة الجدولية d إجراء الإختبارات الآتية:

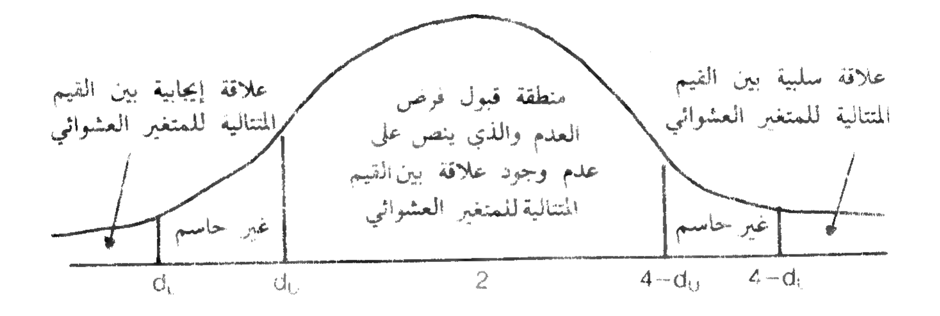
أولاً: اختبار وجود علاقة ايجابية بين قيم المتغير العشوائي (Test for positive autocorrelation):

إذا كانت قيمة d المحسوبة صغيرة (قريبة من الصفر) استنتج الباحث وجود علاقة طردية بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي. ويمكن للباحث مقارنة القيمة d مع القيم الجدولية d_L و d_U عند مستوى المعنوية 1% أو 5% أو 2.5%، كالآتي:

أ: إذا كانت $d < d_L$، فحينئذٍ تُعتبر قيمة d جوهرية من الناحية الإحصائية، ونقبل الفرض البديل الذي ينص على وجود إرتباط إيجابي بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي. ويتوجب عندئذٍ تحويل المتغيرات إلى الصيغة المبينة في المعادلة رقم (7).

ب: إذا كانت $d > d_U$، فحينئذٍ تعتبر قيمة d غير جوهرية من الناحية الإحصائية، ونقبل فرض العدم الذي ينص على عدم وجود ارتباط إيجابي بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي.

ج: إذا كانت $d_L < d < d_U$، أُعتبر الإختبار غير حاسم (Inconclusive).



ثانياً: اختبار وجود علاقة سلبية بين قيم المتغير العشوائي (Test for negative autocorrelation):

أ: إذا كانت $d > 4-d_L$ فحينئذٍ يقبل الباحث الفرض البديل، الذي ينص على وجود ارتباط سلبي (عكسي) بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي. ويتوجب عندئذٍ تحويل متغيرات النموذج إلى الصيغة المبينة في المعادلة رقم (7).

ب: إذا كانت $d < 4-d_U$ فعندئذٍ يقبل الباحث فرض العدم الذي ينص على عدم وجود علاقة عكسية بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي.

ﺣ : إذا كانت $4-d_L < d < 4-d_U$ أعتبر الإختبار غير حاسم.

آخذين في الإعتبار، أنه إذا تبين للباحث وجود علاقة (طردية أو عكسية) بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي، توجب عليه عندئذٍ تحويل متغيرات النموذج إلى الصيغة المبينة في المعادلة رقم (7). علماً أنه بإستطاعة الباحث تقدير قيمة المعامل r للإرتباط المتسلسل الذاتي من المعادلة الآتية:

$$\hat{Y}_t = C_0 + C_1 Y_{t-1} + C_2 X_t + C_3 X_{t-1}$$

حيث يُعتبر معامل الإنحدار الجزئي C_1 تقديراً للمعامل r. ويستطيع الباحث التخلص من العلاقة الموجودة بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي، وذلك بتحويل المتغيرات وفقاً للصيغة التي وردت في المعادلة رقم (7)، كالآتي:

$$Y_t - r Y_{t-1} = b_0 (1-r) + b_1 (X_t - r X_{t-1}) + V_t$$

ولكي لا نخسر المشاهدات الأولى Y_1 و X_1 في عملية التحويل، فإننا نلجأ إلى تحويل المشاهدات الأولى كالآتي:

$$Y_1 \sqrt{1-r^2} \qquad\qquad X_1 \sqrt{1-r^2}$$

وتجدر الإشارة أخيراً، إلى أنه كثيراً ما يصادف الباحث أن تكون قيمة r قريبة من الواحد الصحيح، ومثال ذلك $r=0.81$، أو $r=1.19$. فحينئذٍ باستطاعة الباحث إعتبار أن قيمة $r=1.0$، وبالتالي فإنه يعمل عندئذٍ على تحويل المتغيرات بأخذ الفروقات بين القيم المتتالية للمتغير كالآتي:

$$\triangle Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

$$\triangle X_t = X_t - X_{t-1}$$

أما معادلة الإنحدار، فتصبح*:

$$\triangle \hat{Y}_t = \beta \triangle X_t$$

---

* انظر المعادلة رقم (5) ص: ٢٥٧- وللتوسع في موضوع الإرتباط المتسلسل الذاتي انظر:
Yamane, PP: 998-1009.

حيث ينعدم الثابت b_0. لكن كما سبق وذكرنا فإن افتراض أن r=1.0 يؤدي إلى ما يعرف بالـ (Explosive error).

أمثلة تطبيقية:

مثال (1): دراسة العلاقة بين مساهمة قطاع الصناعات التحويلية ومساهمة قطاع المال والتأمين في الناتج المحلي في سوريا:

يوضح الجدول رقم (1) مساهمة كلاً من قطاع الصناعات التحويلية (Manufacturing)، وقطاع خدمات المال والتأمين (Finance & Insurance) في الناتج المحلي الإجمالي في سوريا، (بالمليون ليرة سورية) للفترة 1963-1979[1]:

(1) الأمم المتحدة، اللجنة الإقتصادية لغربي آسيا «دراسات الدخل القومي». ، النشرة الرابعة - لإحصاءات الناتج المحلي الإجمالي والدخل القومي المتاح والحسابات الموحدة لأقطار اللجنة الإقتصادية لغربي آسيا. اكتوبر - تشرين الأول 1981، ص ص: 93-92

الجدول رقم (1)

مساهمة قطاع الصناعات التحويلية Y_t، ومساهمة قطاع خدمات المال والتأمين X_t، في الناتج المحلي الإجمالي في سوريا (مليون ليرة سورية) للفترة 1963-1979

السنة	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
Y_t	903.1	963.8	1006.4	1057.3	1080.2	1171.0	1430.8	1559.6	1778.9
X_t	445.3	468.5	482.9	494.5	550.5	565.0	604.9	731.1	788.0

السنة	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Y_t	1810.3	2030.0	3487.0	4173.8	4948.8	5310.9	6738.9	7523.2
X_t	832.4	893.6	1095.5	1481.3	1766.7	1965.7	2206.4	2316.8

أما معادلة الإنحدار البسيط، ومعامل التحديد للبيانات الموضحة في الجدول رقم (1) فهما:

$$Y_t = -703.49 + 3.33 X_t$$

$$R^2 = 0.99$$

ويبين الجدول رقم (2) العمليات الحسابية اللازمة لإختبار وجود الإرتباط بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي لبيانات الجدول رقم (1):

الجدول رقم (2)

Y_t	X_t	$\hat{Y}$	e_t	e_t^2	$(e_t - e_{t-1})^2$
903.1	445.3	780.04	123.06	15144.29	—
963.8	468.5	857.33	106.47	11336.03	275.23
1006.4	482.9	905.30	101.10	10220.57	28.84
1057.3	494.5	943.95	113.35	12848.49	150.06
1080.2	550.5	1130.51	−50.31	2531.52	26784.60
1171.0	565.5	1180.49	−9.49	90.00	1666.27
1430.8	604.9	1311.75	119.05	14173.12	16522.53
1559.6	731.1	1732.19	−172.59	29786.41	85052.14
1778.9	788.0	1921.75	−142.85	20406.44	884.29
1810.3	832.4	2069.67	−259.37	67273.19	13576.91
2030.0	893.6	2273.56	−243.56	59321.49	249.96
3487.0	1095.5	2946.19	540.81	292470.35	615236.29
4173.8	1481.3	4231.50	−57.70	3329.29	358214.22
4948.8	1766.7	5182.31	−233.51	54528.60	30909.16
5310.9	1965.7	5845.29	−534.39	285569.32	90528.77
6738.9	2206.4	6647.19	91.72	8411.70	392013.73
7523.2	2316.8	7014.99	508.22	258282.56	173472.25
Σ: 46974	**17689.9**	**46974**	**0.0**	**1145723.37**	**1805565.26**
M: 2763	**1040.56**				

$$d = \frac{1805565.26}{1145723.37} = 1.58$$

ونظراً لأن القيم الجدولية عند $n=17$، و $K'=1$، ومستوى معنوية 5%، هي $d_L=1.13$ و $d_U=1.38$. ونظراً لأن $d_U < d < 4-d_U$ لذلك نقبل فرض العدم بعدم وجود ارتباط متسلسل ذاتي إيجابي.

مثال (2): دراسة العلاقة بين مساهمة قطاع الصناعات التحويلية ومساهمة قطاع النقل والمواصلات في الناتج المحلي للبلدان العربية في القارة الأفريقية:

يبين الجدول رقم (3) مساهمة قطاع الصناعة التحويلية، ومساهمة قطاع النقل والمواصلات (Transport & Communication) في الناتج المحلي الإجمالي للبلدان العربية في القارة الأفريقية (الجزائر، مصر، ليبيا، موريتانيا، المغرب، الصومال، السودان، وتونس) بالمليون دولار أميركي للفترة 1975-1960[1]:

الجدول رقم (3)

مساهمة قطاع الصناعات التحويلية Y_t، وقطاع النقل والمواصلات X_t، في الناتج المحلي الإجمالي للدول العربية في القارة الأفريقية (مليون دولار أميركي) للفترة 1975-1960

السنة	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Y_t	1329	1422	1496	1649	1858	1992	2112	2210	2284
X_t	504	588	617	670	787	868	919	790	812
السنة	**1969**	**1970**	**1971**	**1972**	**1973**	**1974**	**1975**		
Y_t	2667	2832	3252	3214	4088	4654	5352		
X_t	874	1034	1169	1402	1723	1995	2338		

ويبين الجدول رقم (4) العمليات الحسابية لإختبار وجود الإرتباط المتسلسل بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي لبيانات الجدول رقم (3):

(1) الأمم المتحدة، المجلس الإقتصادي والإجتماعي، «المجموعة الإحصائية للعالم العربي 1960-1975» السنة الأولى، عمان، ٢٠ نيسان ـ ابريل 1977، ص ص: 10-3.

الجدول رقم (4)

Y_t	X_t	$\hat{Y}_t$	$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$	e_t^2	$\Delta e_t = e_t - e_{t-1}$	$(\Delta e_t)^2$
1329	504	1408.14	−79.14	6263.21	—	—
1422	588	1593.16	−171.16	29295.62	−92.02	8467.68
1496	617	1657.04	−161.04	25932.38	10.12	102.41
1649	670	1773.77	−124.77	15568.46	36.27	1315.51
1858	787	2031.48	−173.48	30094.94	−48.71	2372.66
1992	868	2209.89	−217.89	47476.18	−44.41	1972.25
2112	919	2322.22	−210.22	44193.86	7.67	58.83
2210	790	2038.09	171.91	29554.17	382.13	146023.34
2284	812	2086.54	197.46	38988.81	25.55	652.80
2667	874	2223.11	443.89	197041.93	246.43	60727.74
2832	1034	2575.52	256.48	65780.22	−187.41	35122.51
3252	1169	2872.88	379.12	143735.22	122.64	15040.57
3214	1402	3386.08	−172.08	29612.81	−551.20	303821.44
4088	1723	4093.12	−5.12	26.23	166.96	27875.64
4654	1995	4692.23	−38.23	1461.62	−33.11	1096.27
5352	2338	5447.73	−95.73	9163.50	−57.50	3306.25
Σ: 42411	1709	42411.00	0.0	714189.15		607355.9
M: 2650.69	1068.13					
S: 1193.39	532.67					

$$\hat{Y}_t = 298.03 + 2.20X_t$$

$$R^2 = 0.97$$

$$d = \frac{\Sigma(\ell_t - \ell_{t-1})^2}{\Sigma \ell_t^2} = \frac{607955.9}{714189.15} = 0.85$$

وبما أن قيمة الإحصائية $d = 0.85$ المحسوبة، أصغر من القيمة الجدولية $d < d_L = 1.10$ عند مستوى المعنوية 5%، و $n = 16$ و $K' = 1$، فإننا نخلص إلى أن البيانات في الجدول رقم (4)، تُعاني من مشكلة وجود الارتباط المتسلسل الذاتي الإيجابي، وعلى الباحث في هذه الحالة تحويل المتغيرات إلى صيغة أخرى تمكنه من التخلص من العلاقة بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي. وهنا نلاحظ أنه يمكننا تقدير قيمة معامل الارتباط بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي، باستخدام المعادلة الآتية:

$$\hat{Y}_t = b_0(1-r) + rY_{t-1} + b_1X_t - b_1rX_{t-1}$$

ويوضح الجدول رقم (5) العمليات الحسابية اللازمة لتقدير قيمة المعامل r:

الجدول رقم (5)

Y_t	Y_{t-1}	X_t	X_{t-1}
1422	1329	588	504
1496	1422	617	588
1649	1496	670	617
1858	1649	787	670
1992	1858	868	787
2112	1992	919	868
2210	2112	790	919
2284	2210	812	790
2667	2284	874	812
2832	2667	1034	874
3252	2832	1169	1034
3214	3252	1402	1169
4088	3214	1723	1402
4654	4088	1995	1723
5352	4654	2338	1995
M: 2738.8	**2470.6**	**1105.73**	**983.47**
S: 1180.17	**984.85**	**528.92**	**425.61**

مصفوفة معاملات الارتباط لمتغيرات
الجدول رقم (5)

	Y_t	Y_{t-1}	X_t	X_{t-1}
Y_t	1.00000	0.98650	0.98170	0.97840
Y_{t-1}	0.98650	1.00000	0.97166	0.97400
X_t	0.98170	0.97166	1.00000	0.98830
X_{t-1}	0.97840	0.97400	0.98830	1.00000

وللحصول على معادلة الانحدار بالوحدات الخام علينا اتباع الخطوات الآتية :

$$\overset{R^{-1}}{\begin{bmatrix} 20.920 & -8.144 & -12.328 \\ -8.144 & 46.157 & -37.684 \\ -12.328 & -37.684 & 50.251 \end{bmatrix}} \overset{V}{\begin{bmatrix} 0.9865 \\ 0.9817 \\ 0.9784 \end{bmatrix}} = \overset{\beta}{\begin{bmatrix} 0.5809 \\ 0.4083 \\ 0.0090 \end{bmatrix}}$$

علماً أن : $b = \beta \frac{S_y}{S_x}$

إذن :

$$\hat{Y}_t = -12.89 + 0.70\ Y_{t-1} + 0.91X_t + 0.02\ X_{t-1}$$

$$R^2 = 0.983$$

ويمكن للباحث استخدام $r = 0.70$ في تحويل المتغيرات، على أن تحوّل المشاهدات الأولى كالآتي:

$$Y_1^* = Y_1\ \sqrt{1-r^2} = 1329\ \sqrt{1-(.7)^2} = 949.10,$$

$$X_1^* = X_1\ \sqrt{1-r^2} = 504\ \sqrt{1-(.7)^2} = 359.93$$

ويوضح الجدول رقم (6) طريقة تحويل المتغيرات إلى الصيغة التي تمكّننا من حذف الارتباط المتسلسل الذاتي بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي لبيانات الجدول رقم (3):

الجدول رقم (6)

$Y_t^* = Y_t - r\,Y_{t-1}$	$X_t^* = X_t - rX_{t-1}$	Y_t	e_t	e_t^2	$(\Delta e_t)^2$
949.10	359.93	897.81	51.295	2631.15	———
491.70	235.20	647.82	−156.12	24373.85	43020.98
500.60	205.40	588.097	−87.496	7655.56	4709.25
601.80	238.10	653.63	−51.83	2686.71	1227.06
703.70	318.00	813.77	−110.07	12115.21	3391.90
691.40	317.10	811.97	−120.57	14536.00	110.25
717.60	311.40	800.54	−82.94	6879.27	1416.02
731.60	146.70	470 45	261.15	68199.60	118397.93
737.00	259.00	695.52	41.48	1720.49	48254.91
1068.20	305.60	788.92	279.28	77998.98	56548.84
965.10	422.20	1022.61	−57.51	3307.04	113427.50
1269.6	445.20	1068.70	200.90	40359.40	66775.73
937.6	583.70	1346.29	−408.69	167023.72	371599.97
1838.2	741.60	1662.75	175.45	30783.16	341219.54
1792.4	788.90	1757.55	34.85	1214.70	19768.36
2094.2	941.50	2063.39	30.81	949.35	16.3216
Σ:16089.8	**6619.53**	**6619.53**	**0.0**	**462434.19**	**1189884.56**
M: 1005.6125	**413.72**	**413.72**			
S:495.49	**231.18**	**231.18**			

$$Y_t^* = 176.43 + 2.0X_t^*$$

$$R^2 = 0.87$$

وباختبار وجود الارتباط (التغاير) بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي في الصيغة المعدلة للمتغيرات في الجدول رقم (6) نجد أن:

$$d = \frac{1189884.56}{462434.19} = 2.57$$

وبما أن:

$$du = 1.37 < d = 2.57 < 4-du = 2.63$$

فإننا نخلص إلى عدم وجود ارتباط متسلسل ذاتي في الصيغة المعدّلة لبيانات النموذج بعد أن تم تحويل المتغيرات كما ورد في الجدول رقم (6).

الحالة الثانية:

مخالفة فرضية ثبات تباين المتغير العشوائي في المجتمعات الفرعية (Heteroscedasticity):

نلاحظ في هذه الحالة، أن القطر في المصفوفة $\sigma^2 I$ لا يحتوي على قيم متساوية، وذلك بالرغم من أن القيم خارج القطر تساوي صفراً. ويعود السبب في ذلك، إلى مخالفة فرضية ثبات تباين المتغير العشوائي في المجتمع الإحصائي، والذي يؤثر بدوره على الخصائص الإحصائية لتقديرات معاملات الانحدار. علماً أنه باستطاعة الباحث، في مثل هذه الحالة، استخدام طريقة (Aitken) لتحويل المتغيرات إلى صيغة تتناسب مع فرضية ثبات التباين للمتغير العشوائي في المجتمعات الفرعية.

فقد قدم (Aitken) عام 1930، طريقة تعرف باسم (Generalized least square = GLS) وتعتبر هذه الطريقة، تعميماً، وتوسيعاً لطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS)، لتشتمل على حالة عدم ثبات تباين المتغير العشوائي في المجتمعات الفرعية، بحيث تُمكّن الباحث من الحصول على تقديرات، خطية، غير متحيزة، وكفوءة لمعاملات الانحدار الجزئية.

فإذا فرضنا أن النموذج الآتي لانحدار Y على X:

$$Y = b_0 + b_1 X + e$$

يعاني من مشكلة مخالفة الفرضية الخاصة بثبات تباين المتغير العشوائي في المجتمعات الفرعية، فإنه يتوجب على الباحث عندئذٍ تحويل متغيرات النموذج إلى صيغة أخرى، ينتج عنها قيم متساوية في قطر المصفوفة $\sigma^2 I$. علماً أنه يوجد العديد من الطرق التي تُمكِّن الباحث من تحويل المتغيرات إلى صيغةٍ تحقق ثبات التباين في المجتمعات الفرعية، وأهم هذه الطرق:

أ: إذا كان تباين المتغير التابع Y يزيد بشكل تناسبي (Proportional) مع الزيادة في X، أي إذا كان:

$$\sigma_y^2 = K \cdot X$$

$$K = \frac{\sigma_y}{\sqrt{X}}$$

فباستطاعة الباحث عندئذٍ، أن يلجأ إلى قسمة طرفي معادلة الإنحدار على $\sqrt{X}$، وهذا بدوره يحقق ثبات تباين المتغير العشوائي في المجتمع الإحصائي. فإذا كانت المعادلة الأساسية للإنحدار:

$$Y = b_0 + b_1 X + e$$

فإن قسمة طرفي المعادلة على $\sqrt{X}$ يعطي:

$$\frac{Y}{\sqrt{X}} = \frac{b_0}{\sqrt{X}} + b_1 \frac{X}{\sqrt{X}} + \frac{e}{\sqrt{X}}$$

وهي المعادلة المطلوبة، ذلك لأن $E\left(\frac{e}{\sqrt{X}}\right)^2 = \frac{\sigma_y^2}{X} = K$، آخذين في الإعتبار أنه إذا كانت إحدى قيم المتغير X تساوي صفراً، فعندئذٍ يستخدم الباحث $\sqrt{X + 0.50}$ في تحويل تلك القيمة.

وبذلك نخلص، إلى أنه إذا كان تباين المتغير Y يتزايد بشكل تناسبي مع X أو $\bar{X}$، فحينئذٍ يتوجب على الباحث أن يأخذ إنحدار $\frac{Y}{\sqrt{X}}$، دالة

للمتغيرات المستقلة $\frac{1}{\sqrt{X}}$ و $\sqrt{X}$. وبمعنى أدق، فإننا نخلص إلى أن المعادلة الأساسية من المتغيرين Y و X، قد أصبحت معادلة من ثلاثة متغيرات: $\frac{Y}{\sqrt{X}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{X}}$ و $\sqrt{X}$. آخذين في الإعتبار أن قيمة الثابت بعد التحويل يساوي صفراً، وهذا بدوره يعطي قيمة مرتفعة لمعامل التحديد R^2، كما وأنه يسبب صعوبة في تفسير النتائج وفي توقع قيم المتغير التابع.

ب: إذا كان تباين المتغير التابع Y يزيد بشكل تناسبي مع القيمة المربعة للوسط الحسابي، أي إذا كان:

$$\sigma_y^2 = K\ \overline{X^2}$$

$$\sigma_y^2 = K\ X^2$$

$$K = \frac{\sigma_y^2}{X^2}$$

فباستطاعة الباحث عندئذٍ أن يلجأ إلى قسمة طرفي معادلة الإنحدار على X، وهذا بدوره يحقق ثبات تباين المتغير العشوائي في المجتمع الإحصائي. فإذا كانت المعادلة الأساسية للإنحدار، كالآتي:

$$Y = b_0 + b_1 X + e$$

فإن قسمة طرفي المعادلة على المتغير X يعطي:

$$\frac{Y}{X} = \frac{b_0}{X} + b_1 \frac{X}{X} + \frac{e}{X}$$

وهي المعادلة المطلوبة، ذلك لأن $K = \frac{\sigma^2 y}{X^2} = E(\frac{e}{X})^2$ ، ونخلص إلى أنه إذا كان تباين المتغير التابع يزيد بشكل تناسبي مع X^2 أو $\overline{X^2}$، فباستطاعة الباحث عندئذٍ أن يأخذ إنحدار المتغير $\frac{Y}{X}$ على المتغير المستقل $\frac{1}{X}$. آخذين في الإعتبار، أن الثابت في المعادلة الأساسية b_0، أصبح

معامل للإنحدار b_1، أي أن معامل الإنحدار b_1 في المعادلة الأساسية أصبح الثابت b_0 في المعادلة الجديدة[1].

فإذا فرضنا أن أحد الباحثين يدرس علاقة الإستهلاك الشخصي C، بالدخل الفردي المتاح (Y) لعينةٍ كبيرة من الأسر:

$$C = b_0 + b_1 Y \tag{1}$$

فمن المتوقع في هذا النموذج أن يكون تباين الخطأ العشوائي للدخل الفردي المنخفض أقل من تباين الخطأ العشوائي للدخل الفردي المرتفع، ذلك لأن إنفاقات الدخل المنخفض تكون عادة على الضروريات (Necessities)، لذلك يتوجب تحويل متغيرات النموذج إلى صيغةٍ تعطي ثبات لتباين المتغير العشوائي، كالآتي:

$$\frac{C}{Y} = b_0 \frac{1}{Y} + b_1 \frac{Y}{Y}$$

$$\frac{C}{Y} = b_0 \frac{1}{Y} + b_1 \tag{2}$$

ومن مقارنة المعادلتين (1) و(2) نلاحظ أن الميل الحدي للإستهلاك b_1 في المعادلة (1)، أصبح الثابت (Intercept) b_1 في المعادلة (2). وبمعنى أدق، فإن الميل الحدي للإستهلاك يساوي b_1 في المعادلة (1)، بينما يساوي b_0 في المعادلة (2). آخذين في الإعتبار أننا سنحصل على قيم مختلفة لمعامل التحديد R^2 في النموذجين (1) و (2)، كما وأن R^2 في النموذج (1) غير قابلة للمقارنة مع قيمة R^2 في النموذج (2)، بسبب كون المتغير التابع $\frac{C}{Y}$ في النموذج (2) مختلف كلياً عن Y في النموذج (1).

---

(1) Aigner, PP: 124-131.

الجدير بالذكر، أن المعادلة (2) لا تعدو عن كونها طريقة للمربعات الصغرى الإعتيادية المرجحة (Weighted least squares). فمن المعلوم، أنه باستخدام طريقة المربعات الصغرى الإعتيادية (OLS) فإننا نحصل على b_0 و b_1 والتي تجعل مجموع مربع البواقي نهاية صغرى. أما في المعادلة (2) فإننا نحصل على b_0 و b_1 والتي تجعل $\Sigma \left(\frac{Y}{X} - \frac{b_0}{X} - b_1 \frac{X}{X}\right)^2$ نهاية صغرى. أي أننا نحصل على b_0 و b_1التي تجعل $\Sigma \frac{1}{X^2} (Y - b_0 - b_1 x)^2$ نهاية صغرى، وهي ذات المعادلة المستخدمة في طريقة المربعات الصغرى الإعتيادية.

تجدر الإشارة هنا، إلى أنه باستطاعة الباحث اعتماد الطرق الحسابية أو اعتماد الطرق البيانية، لمعرفة فيما إذا كان تباين المتغير العشوائي غير ثابت في المجتمعات الفرعية، ولمعرفة نوعية العلاقة بين تباين المتغير العشوائي وبين الوسط الحسابي للمتغير المستقل $\bar{X}$[1].

استخدام الطرق الحسابية في اختبار الفروض الخاصة بالمتغير العشوائي:

أ: طريقة غولدفيلد وكوانت:

لقد قدم غولدفيلد وكوانت (Goldfield and Quandt) عام 1965 طريقة حسابية لإختبار ثبات تباين المتغير العشوائي في المجتمع الإحصائي، يمكن تلخيصها كالآتي:

1 — يجب ترتيب المشاهدات وفقاً لتزايد قيم المتغير X.

2 — تُحذف المشاهدات المركزية (C) من البيانات. علماً أن الهدف من حذف

(1) Drapper and Smith, «Applied Regression Analysis». John Wiley & Sons, Inc., 1966, PP: 86-97. and Johnston PP: 214-221.

البيانات المركزية هو جعل الإختبار الإحصائي أكثر حساسية (Sensitive). ويُقترح عادة حذف من C=6 إلى C=8 إذا احتوت البيانات على 30 مشاهدة، وحذف C=16 إذا احتوت البيانات على 60 مشاهدة . . . الخ.

3 — يعمل الباحث على ايجاد معادلة إنحدار للجزء الأول من البيانات $\frac{n-c}{2}$ ومعادلة إنحدار للجزء المتبقي من البيانات $\frac{n-c}{2}$.

4 — يعمل الباحث على إيجاد إحصائية F لنسبة مجموع مربع البواقي Σd_2^2 في الجزء الثاني من البيانات إلى مجموع مربع البواقي Σd_1^2 في الجزء الأول من البيانات، كالآتي:

$$F = \frac{\Sigma d_2^2}{\Sigma d_1^2}$$

فإذا كانت القيمة المحسوبة لإحصائية — F جوهرية (معنوية) من الناحية الإحصائية، علم الباحث أن البيانات تُعاني من مشكلة عدم ثبات التباين. ويتم الحصول على القيمة الجدولية لإحصائية — F عند مستوى المعنوية المناسب ودرجات الحرية $\frac{n-c-2K}{2}$، حيث ترمز n إلى عدد المشاهدات الكلية، بينما تمثل C عدد المشاهدات المركزية المحذوفة، وتمثل K عدد معاملات الإنحدار مع الثابت في معادلة الإنحدار. فلو أخذنا إنحدار Y على X_1 فقط لكانت K=2.

ب: طريقة غليجسر:

لقد قدم غليجسر (Glejser) عام 1969 طريقة حسابية لإختبار ثبات تباين المتغير العشوائي في المجتمع الإحصائي. وتعتمد هذه الطريقة على أخذ القيم المطلقة للبواقي |d| دالةً في أشكال مختلفة للمتغير المستقل X، ومثال ذلك:

$$|d| = b_0 + b_1 X^{-1}$$

$$|d| = b_0 + b_1 X^{\frac{1}{2}}$$

ثم يعمل الباحث على اختبار جوهرية معاملات الإنحدار b_0 و b_1 من الناحية الإحصائية. فإن أعطت إحدى المعادلات أعلاه، قيماً جوهرية لمعاملات الإنحدار، علم الباحث عندئذٍ أنه يجب تحويل متغيرات النموذج وفقاً للمعادلة التي اعطت قيماً جوهرية لمعاملات الإنحدار.

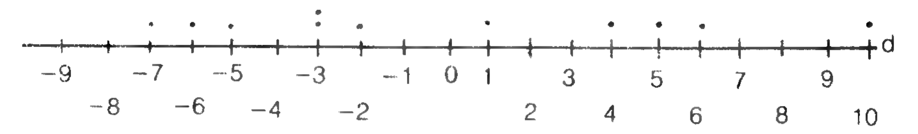
استخدام الطرق البيانية في اختبار الفروض الخاصة بالمتغير العشوائي:

أ: الرسم البياني الشامل (The overall plot):

دعنا نفترض للتبسيط، أن أحد الباحثين حصل من معادلة إنحدار Y على X لبيانات إقتصادية من 11 مشاهدة على القيم الآتية للبواقي:

6, -3, -5, 5, 1, -7, 10, -3, -6, 4, -2

فباستطاعة الباحث عندئذٍ رسم البواقي كالآتي:

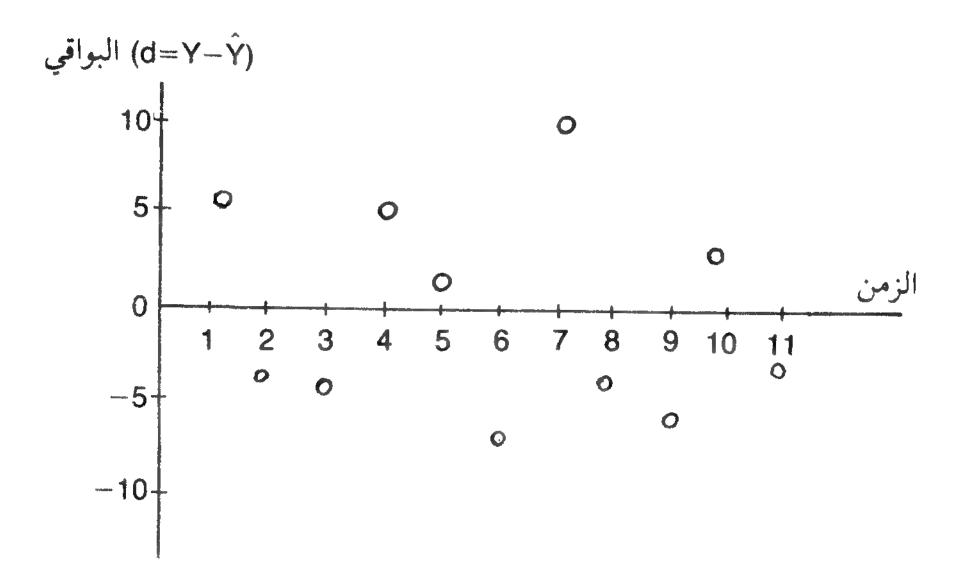


ومن النظر إلى الرسم البياني الشامل، يتمكن الباحث من أن يستنتج فيما إذا كانت البواقي لا تتوزع بشكل التوزيع المعتدل (Normal distribution)، كذلك باستطاعة الباحث تحويل البواقي إلى الوحدات المعيارية Z واختبار فيما إذا كان توزيع الوحدات المعيارية يتبع خصائص التوزيع المعتدل، ومثال ذلك اختبار أن 95% من الوحدات تقع بين $\bar{X} \mp 1.96\,\sigma$.

ب: الرسم البياني للتتابع الزمني (Time sequence plot):

لنفرض أن البواقي في مثالنا السابق كانت لمعادلة إنحدار لسلسلة زمنية من 11 مشاهدة، فباستطاعة الباحث حينئذٍ أن يُوضح بيانياً، العلاقة بين البواقي والزمن كالآتي:

السنين :t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
البواقي :d	6	−3	−5	5	1	−7	10	−3	−6	4	−2



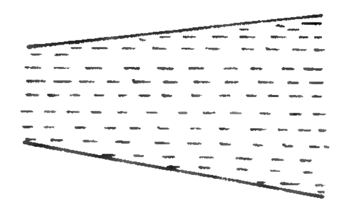
ويمكن للرسم البياني أعلاه أن يأخذ أحد الأشكال الآتية:

(1):

ويدل الشكل أعلاه أنه لا يوجد تأثير طويل المدى للزمن (long- term time effect is not influencing the data) على المتغير العشوائي U، ولئن

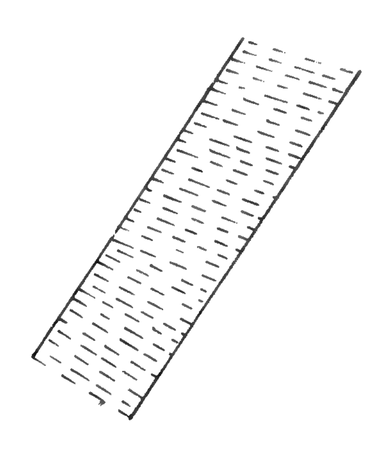
وُجد مثل هذا التأثير فإنه يؤثر وبنفس القيمة على بقية المتغيرات وبالتالي فلا حاجة لتحويل المتغيرات في النموذج الأساسي للتحليل.

:(2)



ويشير الرسم البياني أعلاه إلى أن تباين البواقي يتزايد تناسبياً مع التزايد في X، وهي الحالة المعروفة بحالة عدم ثبات التباين (Heteroscedasticity) في المجتمعات الفرعية. ويتوجب على الباحث في مثل هذه الحالة أن يعمل على قسمة طرفي معادلة الإنحدار للنموذج الأساسي على X.

:(3)



ويدل الرسم البياني هذا على أن النموذج الأساسي في التحليل غير كامل، بمعنى أن الباحث لم يأخذ عامل الزمن في التحليل، وقد يتوجب عليه إدخال متغير الترميز في التحليل وذلك لتقييم التغيرات الموسمية في البيانات.

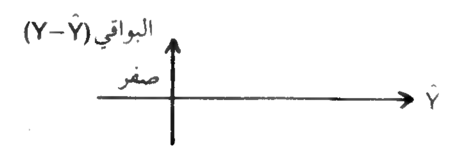
:(4)



ويدل الرسم البياني أعلاه على أن الباحث لم يستخدم النموذج الصحيح في التحليل، وقد يحتاج إلى إدخال عامل الزمن في التحليل بشكل دالة خطية أو دالة تربيعية.

وهنا تجدر الإشارة، إلى أن الرسومات البيانية أعلاه قد تأخذ الإتجاه المعاكس، لكن يبقى التفسير ذاته.

الجدير بالذكر، أن الرسومات البيانية السالفة الذكر والخاصة ببيانات السلسلة الزمنية، تنطبق أيضاً على بيانات مأخوذة في نقطة زمنية محددة، أي بيانات مقطعية (Cross-section data). لكن يتوجب على الباحث حينئذٍ استبدال الزمن على المحور الأفقي بالقيم المتوقعة للمتغير التابع $\hat{Y}$:



ومن حيث التفسير، نجد أن الشكل البياني رقم (2) يتطلب تحويل المتغيرات في المعادلة الأساسية، بينما الأشكال (3) و (4) فتدل على وجود خطأ نظامي وناتج عن حذف متغيرات هامة من المعادلة الأساسية، مثل X^2 أو مثل متغير التفاعل $X_1 X_2$ . . . . الخ، وعلى الباحث إدخال هذه المتغيرات في النموذج الأساسي للتحليل.

مثال (3): دراسة علاقة الإستهلاك الشخصي بالدخل الفردي المتاح لبيانات غير زمنية:

يبين الجدول رقم (7) الإنفاق الإستهلاكي C والدخل المتاح Y بالليرة اللبنانية لثلاثين عائلة:

الجدول رقم (7)

بيانات فرضية عن الإنفاق الإستهلاكي والدخل المتاح لعينه من ثلاثين عائلة

الدخل المتاح Y	الإستهلاك C		
7000	6100	5800	5600
8000	7100	6700	6400
9000	8200	7600	7300
10000	8600	8300	8000
11000	9200	9000	8800
12000	10300	9900	9400
13000	11400	10700	10000
14000	11900	11500	10900
15000	13100	12500	11900
16000	13500	12800	12200

أما معادلة الإنحدار ومعامل التحديد للبيانات أعلاه فهما:

$$\hat{C} = 422.42 + 0.788\ Y$$

$$R^2 = 0.97$$

ويقيس المعامل $b_1 = 0.788$ الميل الحدي للإستهلاك mpc. الجدير بالذكر أنه من المعلوم أن تباين الخطأ العشوائي لإنفاق العائلات ذات الدخل المحدود يكون أقل من تباين الخطأ العشوائي لإنفاق العائلات ذات الدخل

المرتفع، ذلك لأن إنفاق العائلات ذات الدخل المحدود يكون غالباً على السلع الضرورية. في مثل هذه الحالة فقد يرغب الباحث اختبار فيما إذا كانت بيانات الجدول رقم (7) تعاني من مشكلة عدم ثبات التباين. وبإتباع طريقة (Goldfield & Quandt) علينا قبل كل شيء ترتيب البيانات وفقاً لتزايد قيم المتغير المستقل، ثم نحذف ما يقارب من 20% من المشاهدات المركزية، ومن ثم نوجد معـادلتي إنحدار كما هو مبين في الجدولين (8) و (9)، حيث يبين الجدول رقم (8) الإنفاق الإستهلاكي والدخل المتاح للعائلات الـ 12 الأولى، في حين يبين الجدول رقم (9) الإنفاق الإستهلاكي والدخل المتاح للعائلات الـ 12 الأخيرة، ونكون بذلك قد حذفنا C=6 من المشاهدات الواقعة في مركز البيانات الأصلية. أما معادلات الإنحدار ومعاملات التحديد للنماذج في الجدولين (8) و (9) فهي على التوالي:

الجدول رقم (8):

$$\hat{C} = 30 + 0.837\ Y$$

$$R^2 = 0.91$$

$$\Sigma\ d_1^2 = 1069000.82$$

الجدول رقم (9):

$$\hat{C} = 1040 + 0.747\ Y$$

$$R^2 = 0.71$$

$$\Sigma\ d_2^2 = 3344001.78$$

الجدول رقم (8)

C	Y	$\hat{C}$	d	d^2
5600	7000	5886.67	−286.67	82177.80
5800	7000	5886.67	−86.67	7511.69
6100	7000	5886.67	213.33	45509.69
6400	8000	6723.33	−323.33	104544.44
6700	8000	6723.33	−23.33	544.29
7100	8000	6723.33	376.67	141880.29
7300	9000	7560.00	−260.00	67600.00
7600	9000	7560.00	40.00	1600.00
8200	9000	7560.00	640.00	409600.00
8000	10000	8396.67	−396.67	157344.44
8300	10000	8396.67	−96.67	9345.09
8600	10000	8396.67	203.33	41343.09
			$\Sigma d = o$	$\Sigma d_1^2 = $ **1069000.82**

الجدول رقم (9)

C	Y	$\hat{C}$	d	d^2
10000	13000	10746.67	−746.67	557511.11
10700	13000	10746.67	−46.67	2178.09
11400	13000	10746.67	653.33	426840.09
10900	14000	11493.33	−593.33	352044.44
11500	14000	11493.33	6.67	44.49
11900	14000	11493.33	406.67	165380.49
11900	15000	12240.00	−340.00	115600.00
12500	15000	12240.00	260.00	67600.00
13100	15000	12240.00	860.00	739600.00
12200	16000	12986.67	−786.67	618849.69
12800	16000	12986.67	−186.67	34845.69
13500	16000	12986.67	513.33	263507.69
			$\Sigma d=0$	$\Sigma d_2^2 = $ **3344001.78**

وباستخدام اختبار F- الإحصائي نجد أن:

$$F = \frac{\Sigma d_2^2}{\Sigma d_1^2} = \frac{3344001.78}{1069000.82} = 3.13$$

ومن مقارنة القيمة المحسوبة F= 3.13، مع القيمة الجدولية F = 2.97، عند درجات الحرية $10 = \frac{30-6-4}{2} = \frac{n-c-2k}{2} = dF$، ومستوى المعنوية 5%، نخلص إلى وجود مشكلة عدم ثبات التباين في البيانات للجدول رقم (7).

ويبين الجدول رقم (10) البيانات الأصلية والبيانات بعد تحويلها بالقسمة على قيم المتغير المستقل، أما معادلة الانحدار ومعامل التحديد للجدول رقم (10) فهما كالآتي:

$$\frac{C}{Y} = 0.79 + 357.97 \frac{1}{Y}$$
$$R^2 = 0.07$$

الجدير بالذكر أن $b_0 = 0.79$ هي الميل الحدي للإستهلاك mpc والتي كانت تقاس بالمعامل b_1 في الجدول رقم (7) للبيانات الأصلية، كذلك تجدر الملاحظة إلى أن المتغير التابع C/Y أصبح مختلفاً عن المتغير الأساسي C مما أدى إلى انخفاض قيمة R^2.

الجدول رقم (10)

C	Y	C/Y	1/Y
5600	7000	0.800000	0.0001428571
5800	7000	0.828570	0.0001428571
6100	7000	0.871430	0.0001428571
6400	8000	0.800000	0.0001250000
6700	8000	0.837500	0.0001250000
7100	8000	0.887500	0.0001250000
7300	9000	0.811111	0.0001111100
7600	9000	0.844444	0.0001111100
8200	9000	0.911111	0.0001111100
8000	10000	0.800000	0.0001000000
8300	10000	0.830000	0.0001000000
8600	10000	0.860000	0.0001000000
8800	11000	0.800000	0.0000909090
9000	11000	0.818180	0.0000909090
9200	11000	0.836360	0.0000909090
9400	12000	0.783330	0.0000833300
9900	12000	0.825000	0.0000833300
10300	12000	0.858330	0.0000833300
10000	13000	0.769230	0.0000769230
10700	13000	0.823080	0.0000769230
11400	13000	0.876923	0.0000769230
10900	14000	0.778571	0.0000714286
11500	14000	0.821429	0.0000714286
11900	14000	0.850000	0.0000714286
11900	15000	0.793330	0.0000666670
12500	15000	0.833330	0.0000666670
13100	15000	0.873330	0.0000666670
12200	16000	0.762500	0.0000625000
12800	16000	0.800000	0.0000625000
13500	16000	0.843750	0.0000625000

مثال (4): دراسة علاقة النفقات الجارية للحكومة بالصادرات في بعض الدول العربية:

يبين الجدول رقم (11) قيمة الصادرات السنوية، والنفقات الجارية للحكومة بالمليون دولار أميركي لبعض الدول العربية عام 1977[1]:

الجدول رقم (11)
الصادرات والنفقات الجارية للحكومة عام 1977
(مليون دولار أميركي)

(Y) النفقات الجارية للحكومة	الصادرات (X)	البلد
125	104	الصومال
133	107	جمهورية اليمن الديموقراطية
184	116	الجمهورية العربية اليمنية
172	183	موريتانيا
916	824	السودان
423	992	لبنان
622	1257	الأردن
1682	1444	سوريا
867	1583	تونس
1053	1584	عمان
2209	1870	المغرب
972	2089	قطر
8200	4543	مصر
3928	6252	الجزائر
2928	10061	الإمارات العربية المتحدة
5506	11802	ليبيا
4757	12470	كويت
10414	46212	السعودية

(١) الأمم المتحدة، اللجنة الإقتصادية لغربي آسيا، «المؤشرات الاحصائية للعالم العربي للفترة 1970-1978»، ص ص: 176-179 و 185-187.

$\hat{Y} = 1217.19 + 0.22X$

$R^2 = 0.67$

ونظرا لأنه من المتوقع أن يكون تباين الخطأ العشوائي للنفقات الجارية للدول الغنية، أكبر من تباين الخطأ العشوائي للنفقات الجارية في الدول الأقل غنى، لذلك فقد يقترح الباحث إجراء اختبار لمعرفة مدى انطباق فرضية ثبات التباين على البيانات. وتبين الجداول (12) و (13) على التوالي العمليات الحسابية اللازمة للحصول على مجموع مربع البواقي وذلك بإتباع طريقة (Goldfield & Quandt).

الجدول رقم (12)

البلد	Y النفقات الجارية للحكومة	X الصادرات	$\hat{Y}$	d	d^2
الصومال	125	104	169.69	−44.69	1997.24
جمهورية اليمن الديموقراطية	133	107	171.15	−38.15	1455.28
الجمهورية العربية اليمنية	184	116	175.52	8.48	71.89
موريتانيا	172	183	208.07	−36.07	1301.36
السودان	916	824	519.52	396.48	157197.31
لبنان	423	992	601.15	−178.15	31735.80
الأردن	622	1257	729.90	−107.90	11642.78
				$\Sigma d:0$	Σd_1^2 = 205401.66

$\hat{Y} = 119.15 + 0.49X$

$R^2 = 0.63$

$\Sigma d_1^2 = 205401.66$

الجدول رقم (13)

البلد	Y النفقات الجارية للحكومة	X الصادرات	$\hat{Y}$	d	d^2
قطر	972	2089	3499.33	−2527.33	6387414.47
مصر	8200	4543	3879.54	4320.46	18666374.61
جزائر	3928	6252	4144.32	−216.32	46794.51
الإمارات العربية المتحدة	2928	10061	4734.46	−1806.46	3263301.11
ليبيا	5506	11802	5004.20	501.80	251803.24
كويت	4757	12470	5107.70	−350.70	122986.99
السعودية	10414	46212	10335.45	78.55	6169.94
					$\Sigma d_2^2 = 28744844.87$

$$\hat{Y} = 3175.68 + 0.16\ X$$

$$R^2 = 0.53$$

$$\Sigma\ d_2^2 = 28744844.87$$

إذن :

$$F = \frac{\Sigma\ d_2^2}{\Sigma\ d_1^2} = \frac{28744844.87}{205401.66} = 139.94$$

ومن مقارنة القيمة المحسوبة لإحصائية F، مع القيمة الجدولية F=5.05 عند مستوى المعنوية 5% ودرجات الحرية

$$dF = \frac{18-4-4}{2} = 5$$

نخلص إلى ضرورة تحويل المتغيرات كما هو مبين في الجدول رقم (14).

الفصل السابع
النماذج الأحادية الاتجاه

تمهيد:

تعتبر النماذج الاقتصادية الأحادية الاتجاه (Economic recursive systems)، والمعروفة في تحليل الانحدار باسم التحليل الباثي (Path analysis)، من أحدث الأساليب الإحصائية التي يمكن استخدامها في تحليل معاملات الارتباط البسيطة بين المتغيرات إلى آثار مباشرة (Direct effects) وأخرى غير مباشرة (Indirect effects). إضافةً إلى ذلك فإن تقييم الأهمية النسبية للمتغيرات المستقلة في تحديد (أو تفسير) الاختلافات الكلية للمتغير التابع يصبح له معنى واضحاً عندما تتم دراسته ضمن إطار التحليل الباثي.

يعتمد التحليل الباثي بشكل أساسي على تحليل العلاقات بين المتغيرات في نماذج سببيّة (Causal Models)، مبنية على نظريات علمية، إو مبنية على أسس منطقية (Logical basis)، لكن ذلك لا يعني أن الباحث يعمل على برهنة وجود «سبب أو نتيجة» بين المتغيرات في النموذج السببي، كما وأن وجود علاقة بين متغيرين، لا تعني أن المتغير المستقل هو سبب للمتغير التابع أو أن المتغير التابع هو نتيجة للمتغير المستقل. والتحليل الباثي الذي يدرس النماذج السببيّة لا يخرج في الحقيقة عن هذا المنطق، حيث لا يوجد في التحليل الباثي

أية محاولة لبرهنة وجود «سبب ونتيجة» (Cause and effect) بين المتغيرات، لكن ذلك لا يمنع الباحث من أن يفكر بصورة سببية (To think causally) إذ يقول (Blalock 1961): «ينتمي التفكير السببي بشكل تام إلى مستويات نظرية حيث لا يمكن برهنة القوانين السببية بشكل تجريبي. لكن ذلك لا يمنع الباحث من أن يفكر بشكل سببي، فيبني نماذج سببية تمكنه من فهم العلاقات بين المتغيرات، بحيث يمكن اختبار هذه النماذج بشكل غير مباشر (Indirectly testable)[1].

لقد حظي استخدام النماذج الأحادية الاتجاه (التحليل البائي)، في مجال البحوث غير التجريبية (Nonexperimental research)، دعماً كبيراً من كبار الإحصائيين أمثال: Wright, Simon, Blalock, Kerlinger and pedhazur[2]، وقبل البدء بشرح التحليل البائي لا بد من شرح بعض المصطلحات المستخدمة في هذا التحليل:

---

(1) Hubert M Blalock, Jr., "Causal Inferences in Non-Experimental Research." Chapel Hill: The university of North Carolina press. U.S.A.. 1961. P:6.

(2) Hubert M Blalock, Jr., "Theory Construction". (Prentice - Hall, Inc. New Jersy 1969). and "Causal Models in the Social Sciences". (Chicago: Aldine atherton, 1971). Kerlinger and Pedhazur. "Multiple Regression in Behavioral Research". (Holt, Rine Hart and Winston, Inc., New York, 1973 PP:444 - 445). S. Wright., "Correlation and Causation", (Journal of Agricultural Research 20, Jan., 1921. PP:557 - 585). S. Wright, "The methods of Path Coefficients". (Annals of Mathematical Statistics 5., Sept., 1934. PP:161 - 215). S. Wright., "Path Coefficients and Path Regressions: Alternative or Complementary Cocepts". (Biometrics 16, June 1960. PP:189 - 202). Herbert A. Simon., "on the Definition of the Causal Relation", (The Journal of Philosophy 49, July 1952 PP:517 - 528) and Herbert A. Simon, "Models of Man". (New York: John wiley and Sons 1957).

المصطلحات المستخدمة في التحليل الباثي:

ـ المتغير الخارجي والمتغير الداخلي: (An exogenous and an endogenous variables)

المتغير الخارجي هو المتغير الذي تتحدد اختلافاته بمتغيرات خارجة عن نطاق النموذج السببي، أما المتغير الداخلي فهو المتغير الذي تتحدد اختلافاته بمتغيرات موجودة في النموذج السببي، لذلك يُعامل المتغير الخارجي على أنه دالة في الخطأ العشوائي $Z = R_e$، بينما يعامل المتغير الداخلي تارة على أنه متغير مستقل، وتارة أخرى على أنه متغير تابع ودالة في متغيرات مستقلة أخرى بالإضافة إلى الخطأ العشوائي، وبالتالي فيوجد في النموذج السببي عدة متغيرات مستقلة وعدة متغيرات تابعة. ولقد ميّز (Land 1975) بين هذين النوعين من المتغيرات من حيث المصدر، فيرى أن المتغير الداخلي ـ المنبثق من الداخل ـ (Originating from within) هو المتغير الذي يهدف النموذج الاقتصادي إلى تحديد (تفسير) اختلافاته، بينما يرى أن المتغير الخارجي ـ المنبثق من خارج النموذج ـ (Originating from without) هو المتغير الذي تتحدد اختلافاته بمتغيرات خارجة عن نطاق النموذج السببي[1].

ـ الباقي: (Residual)

الباقي هو الخطأ العشوائي (Random error)، الذي يدل على أثر المتغيرات التي لا يمكن قياسها واحتوائها بشكل صريح في النموذج السببي، ويتم قياس الباقي بشكل غير مباشر ويرمز له بالرمز R_e.

---

(1) Kenneth C. Land., "Comparative Statistics in Sociology: Including a Mathematical Theory of Growth and Differentiation in Organizations". In Quantitative Sciology: International Perspectives on Mathematical and Statistical Modeling. gen ed, H.M. Blalock (New York: Academic Press 1975) P:476

- العلاقة السببية المباشرة: (A direct causal relationship)

توجد العلاقة السببية المباشرة بين المتغير المستقل X، والمتغير التابع Y، عندما، وفقط عندما، (If and only if) تغير في X يحدث تغير مباشر في Y، علماً أن بقية المتغيرات كانت قد أُدخلت في النموذج السببي وأُبقي أثرها ثابتاً.

- العلاقة السببية غير المباشرة: (An indirect causal relationship)

توجد العلاقة السببية غير المباشرة بين المتغير المستقل X، والمتغير التابع Y، عندما يكون X مؤثراً في Y عبر متغيرات وسيطة أخرى.

- المعامل الباثي: (Path coefficient)

يدل المعامل الباثي P_{ji} على أثر المتغير المستقل على المتغير التابع، علماً أن الرموز السفلية (Subscripts) تشير إلى المتغير التابع (j) وإلى المتغير المستقل (i). الجدير بالذكر، أن المعامل الباثي يساوي في قيمته إلى قيمة معامل الانحدار الجزئي بالوحدات المعيارية (Beta weights = β_js)، ويرى (Moser and Kalton, 1972) أن السبب في تسمية معامل الانحدار الجزئي باسم المعامل الباثي في النماذج الأحادية الاتجاه إنما يعود إلى إمكانية تحليل معامل الارتباط البسيط بين متغيرين إلى آثار مباشرة وآثار غير مباشرة تصل بين المتغيرين عبر مسارات ـ مسالك ـ (Paths) في النموذج السببي[1].

- النموذج السببي الأحادي الاتجاه: (A recursive causal model)

هو النموذج الذي تكون فيه السببية أحادية الاتجاه، حيث تنعدم في هذا

(1) C.A. Moser and G.S. Kalton. "Survey Methods in Social Investigation". 2nd Am. ed. New York: Basic Books, 1972, P:460.

النموذج العلاقات السببية العكسية (Reciprocal causation) بين المتغيرات. ففي هذا النموذج تُرتب المتغيرات وفقاً لأولويتها السببية، وبالتالي فإذا كان المتغير X سبباً للمتغير Y، فلا يمكن للمتغير Y أن يكون سبباً للمتغير X في وقتٍ واحد.

- السهم الأحادي الاتجاه: (A unidirectional arrow)

وهو سهم مستقيم يُرسم من المتغير المستقل (الذي يُعدّ سبباً)، إلى المتغير التابع (الذي يُعدّ نتيجة) في النموذج السببي.

أمثلة تطبيقية:

مثال (1): تفسير ظاهرة اختلاف معدل استهلاك الفرد للكهرباء في نموذج سببي للدول العربية لعام 1977:

يتميز الوطن العربي بالتفاوت الكبير في انتشار الطاقة الكهربائية واستهلاكها، وتتفاوت الدول العربية في معدلات استهلاك الفرد للطاقة الكهربائية، فبينما يتجاوز هذا المعدل 9900 ك.و.س في البحرين فإنه لا يتعدى 21 ك.و.س في الصومال، حيث يشكل أدنى مستويات العالم.

لا شك أن هناك علاقة مباشرة وقوية بين استهلاك الطاقة وبين النمو الاقتصادي وارتفاع المستوى الثقافي (أو نسبة الأمية) لبلدٍ ما و... الخ، لكن نظراً لعدم توافر بيانات على كثيرٍ من المتغيرات الأساسية في الدول العربية لذلك فقد تم الاكتفاء بالمتغيرات الموضحة في الجدول رقم (1) لتفسير ظاهرة اختلاف معدل استهلاك الفرد للطاقة الكهربائية في الدول العربية.

يوضح الجدول رقم (1) استهلاك الفرد للكهرباء (Per capita electric consumption)[1]، والناتج المحلي الإجمالي للفرد الواحد[2]

---

(1) التقرير الاقتصادي العربي الموحد عام 1981، ص: 235.

(2) المؤشرات الإحصائية للعالم العربي للفترة 1970 - 1978 ص ص: 65 - 63

(Per capita GDP)، ونسبة مساهمة قطاعي الصناعة التحويلية والاستخراجية في الناتج المحلي الإجمالي (The percentage contribution of manufactur-ing & mining in GDP)[1] والمتغير الترميزي لتمييز الدول النفطية عن غيرها[2] عام 1977.

الجدول رقم (1)

استهلاك الفرد للكهرباء ك.و.س (X_4)، الناتج المحلي الإجمالي للفرد الواحد بالدولار الأميركي (X_3)، نسبة مساهمة الصناعة التحويلية والاستخراجية في الناتج المحلي الإجمالي (X_2)، متغير ترميزي وهمي لتمييز الدول النفطية عن الدول غير النفطية (X_1)

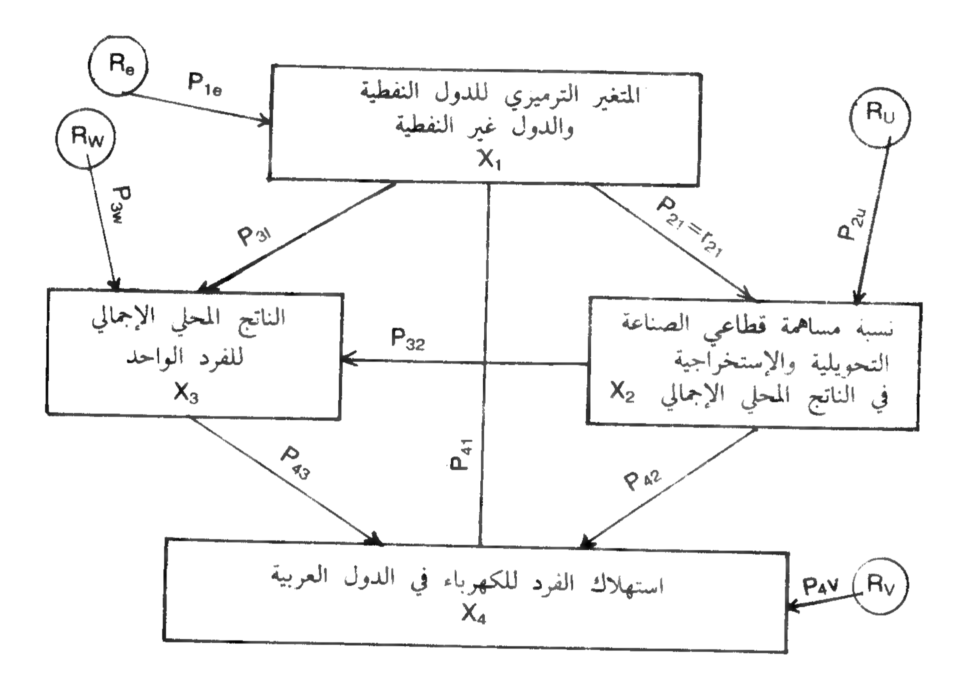
البلد	X_4	X_3	X_2	X_1
الجزائر	343	1127	43	1
مصر	420	484	24	0
الأردن	405	713	22	0
ليبيا	1520	7375	62	1
المغرب	260	593	23	0
عمان	1360	3128	63	0
السعودية	1320	7636	68	1
الصومال	21	243	9	0
سوريا	406	815	19	0
تونس	388	887	21	0
الإمارات العربية	5100	16203	63	1
العراق	743	1578	78	1
اليمن الشمالي	26	329	6	0
اليمن الجنوبي	106	264	14	0
الوسط الحسابي	**887**	**2955.36**	**36.79**	**0.357**
الانحراف المعياري	**1309.82**	**4551.29**	**24.96**	**0.4972**

(1) المؤشرات الإحصائية للعالم العربي للفترة 1978 - 1970 ص ص: 74 - 70.

(2) أعطي الرمز (1) للدول النفطية، وهي الدول التي يزيد انتاج النفط فيها عن نصف مليون برميل يومياً.

واعتماداً على الأسس المنطقية فقد تمَّ التوصل إلى النموذج السببي الأحادي الإتجاه في الرسم البياني رقم (1)*

الرسم البياني رقم (1)



* لقد تمّ الإكتفاء في النموذج أعلاه باستخدام أربعة متغيرات وعينة من 14 مشاهدة، علماً أن استخدام التحليل البائي والذي يعتمد أساساً على استخدام تحليل الإنحدار المتعدد، يتطلب اختيار المتغيرات وفقاً لتوصيات النظرية العلمية، أو البحوث والدراسات السابقة، إضافة إلى الأسس المنطقية، كما ويتطلب استخدام عينة كبيرة الحجم، وهو أمر يصعب توافره في إقتصاديات الدول العربية. وتجدر الإشارة أيضاً إلى أنه في حالة وجود نظرية علمية، توضح العلاقات السببية بين المتغيرات، فإن التحليل البائي يعتبر أفضل وسيلة إحصائية تساعد الباحث في اختبار مدى صحة النظرية العلمية وملاءمتها للواقع. لكن في حالة عدم وجود نظرية علمية تحدد الأولويات السببية للمتغيرات، يتوجب على الباحث حينئذٍ اللجوء إلى الأسس المنطقية في تحديد العلاقات بين المتغيرات، علماً أن الأسس المنطقية تعتمد على التتابع الزمني في السببية، حيث لا يمكن لظاهرة أن تكون «نتيجة» لظاهرة أخرى تمّت بعدها من حيث الزمان، وبالنسبة لمثالنا أعلاه من أربعة متغيرات، فبالإمكان ترتيب المتغيرات في $16=2^4$ نموذج سببي أحادي الإتجاه، وقد تمّ اختيار النموذج أعلاه اعتماداً على الأسس المنطقية.

علماً أننا نفترض في النموذج السببي الأحادي الإتجاه أعلاه ما يلي:

أ - أن النموذج أعلاه هو: نموذج سببي، وخطي، وتنطبق عليه الخاصية الجمعية (Additive property).

ب - يفترض أن X_1 تسبق غيرها من حيث الأولوية السببية لذلك فإن X_1 هي متغير خارجي ودالة في الخطأ العشوائي R_e. أما X_2 فإنها تسبق X_3 من حيث الأولوية السببية، لذلك فإن X_2 متغير داخلي ودالة في X_1 وفي الخطأ العشوائي R_U. أما X_3 فإنها تسبق X_4 من حيث الأولوية السببية، لذلك فإن X_3 متغير داخلي ودالة في المتغيرات X_1، X_2 وفي الخطأ العشوائي R_W. أما X_4 فهو المتغير النهائي المراد شرح (تفسير) إختلافاته الكلية، وبالتالي فهو دالة للمتغيرات المستقلة X_1، X_2، X_3 والخطأ العشوائي R_V.

ج - يُفترض أن العلاقة السببية في النموذج أعلاه أحادية الإتجاه حيث تنعدم العلاقات العكسية.

د - يُفترض أن المتغيرات في النموذج السببي مقاسة في شكل إنحرافات عن الوسط الحسابي وبالوحدات المعيارية، لذلك فإن نقطة التقاطع (الثابت) b_0 تساوي الصفر.

هـ - يُفترض إنعدام العلاقة بين البواقي R_e ، R_U ، R_W و R_V، كذلك يُفترض إنعدام العلاقة المشتركة بين المتغيرات الموجودة في النموذج السببي، والمتغيرات الخارجة عن نطاق النموذج السببي والتي لم نتمكن من قياسها وإدخالها بشكل صريح في النموذج السببي. بمعنى أننا نفترض إنعدام العلاقة بين البواقي، وإنعدام العلاقة بين البواقي ومتغيرات النموذج.

إذن: معادلات الإنحدار الخطي للنموذج السببي أعلاه هي:

$$(1)\quad Z_1 = R_e$$

$$(2)\quad Z_2 = \beta_1 Z_1 + R_U$$

$$(3)\quad Z_3 = \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + R_W$$

$$(4)\quad Z_4 = \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \beta_3 Z_3 + R_V$$

وحتى نتمكن من إيجاد الحل للنموذج السببي أعلاه علينا أن نحلل معاملات الإرتباط البسيطة بين المتغيرات، إلى معاملات تقيس الآثار المباشرة، ومعاملات تقيس الآثار غير المباشرة بين المتغيرات * .

تحليل معاملات الإرتباط البسيطة بين المتغيرات إلى معاملات للآثار المباشرة وللآثار غير المباشرة:

يمكن تحليل معاملات الإرتباط البسيطة بين المتغيرات في النموذج السببي الموضح في الرسم البياني رقم (1)، إلى آثار مباشرة، وآثار غير مباشرة، كما يتضح في المعادلات الآتية:

$$(5)\quad r_{12} = P_{21}$$

$$(6)\quad r_{13} = P_{31} + P_{32}\, P_{21}$$

$$(7)\quad r_{23} = P_{31}\, P_{21} + P_{32}$$

$$(8)\quad r_{41} = P_{41} + P_{42}\, P_{21} + P_{43}\, P_{31} + P_{43}\, P_{32}\, P_{21}$$

$$(9)\quad r_{42} = P_{41}\, P_{21} + P_{42} + P_{43}\, P_{31}\, P_{21} + P_{43}\, P_{23}$$

$$(10)\quad r_{43} = P_{41}\, P_{31} + P_{41}\, P_{31}\, P_{21} + P_{42}\, P_{31}\, P_{21} + P_{42}\, P_{32} + P_{43}$$

* للتوسع في مناقشة التحليل الباثي انظر:
David R., Heise, «Problems in Path Analysis and Causal Inference». In Sociological Methodology, PP. 38-73. Edited by Edgar F. Borgatta. San Francisco: Jossey-Bass, 1969. P: 67.

ولنأخذ المعادلة (8) مثلاً، فهي تبين الأثر المباشر للمتغير X_1على المتغير التابع X_4 والمقاس بالمعامل الباثي P_{41} ، كذلك تبين الآثار غير المباشرة للمتغير المستقل X_1 على المتغير التابع X_4عبر المتغيرات X_2و X_3، حيث أن $P_{42}P_{21}$ هي الأثر غير المباشر للمتغير X_1 على X_4 عبر المتغير X_2، كذلك فإن $P_{43}P_{31}$ هي الأثر غير المباشر للمتغير المستقل X_1 على المتغير التابع X_4 عبر المتغير X_3. أما $P_{43}P_{32}P_{21}$ فهي الأثر غير المباشر للمتغير X_1 على X_4 عبر المتغيرات X_2 وX_3 معاً. والجدير بالذكر أن المعادلات (8) و (9)و (10) لمثالنا السابق هي المعادلات اللازمة لحساب الآثار المباشرة، والآثار غير المباشرة للنموذج السببي. وقبل إعطاء النتائج النهائية للنموذج السببي الموضح في الرسم البياني رقم(1)، يفضل توضيح خمسة نقاط أساسية:

(1): طريقة تحليل معاملات الإرتباط البسيطة بين المتغيرات إلى آثار مباشرة وآثار غير مباشرة:

تمّ في الفصل الثاني من هذا الكتاب تقديم عدة صيغ للحصول على معامل الإرتباط البسيط بين متغيرين، وإحدى هذه الصيغ هي المعادلة التعريفية لمعامل الإرتباط:

$$r_{xy} = \frac{\Sigma Z_x Z_y}{N}$$

وباستخدام هذه الصيغة التعريفية، يمكننا تحليل معامل الإرتباط البسيط إلى معاملات للآثار المباشرة، ومعاملات للآثار غير المباشرة. فعلى سبيل المثال تمّ الحصول على المعادلة رقم (6)، كالآتي:

$$r_{13} = \frac{\Sigma Z_1 Z_3}{N}$$

$$r_{13} = \frac{1}{N} \Sigma Z_1 Z_3$$

وبتبديل Z_3 بقيمتها من المعادلة رقم (3) ينتج ما يلي:

$$r_{13} = \frac{1}{N} \Sigma Z_1 (\beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \beta_W Z_W)$$

$$r_{13} = \beta_1 \frac{\Sigma Z_1^2}{N} + \beta_2 \frac{\Sigma Z_1 Z_2}{N} + \beta_W \frac{\Sigma Z_1 Z_W}{N}$$

ونظراً لأن $\beta_{ji} = P_{ji}$ فيمكن استبدال كل β بمثيلتها P، إذن:

$$r_{13} = P_{31} \frac{\Sigma Z_1^2}{N} + P_{32} \frac{\Sigma Z_1 Z_2}{N} + P_{3W} \frac{\Sigma Z_1 Z_W}{N}$$

وهنا تجدر الإشارة إلى أن $1 = \frac{N}{N} = \frac{\Sigma Z_1^2}{N}$ ذلك لأن تباين الوحدات المعيارية يساوي الواحد الصحيح حيث أن:

$$V_Z = \frac{\Sigma (Z-\bar{Z})^2}{N} = \frac{\Sigma Z^2}{N}$$

$$V_Z = \frac{1}{N} \Sigma \frac{(x-\bar{x})^2}{S^2}$$

$$V_Z = \frac{1}{N} \cdot \frac{\Sigma (x-\bar{x})^2}{\frac{\Sigma (x-\bar{x})^2}{N}} = 1$$

كذلك تجدر الإشارة إلى أنه بالتعريف فإن العلاقة بين X_2 و X_1 هي علاقة مباشرة وتساوي:

$$\frac{\Sigma Z_1 Z_2}{N} = r_{12} = P_{21}$$

كما وأن إفتراض إنعدام العلاقة بين الخطأ العشوائي ومتغيرات النموذج يعني أن:

$$\frac{\Sigma Z_1 Z_W}{N} = 0$$

$$P_{31} = r_{13} - r_{23}\ r_{21} + P_{31}\ r^2_{21}$$

$$P_{31}\ (1 - r^2_{21}) = r_{13} - r_{23}\ r_{21}$$

$$P_{31} = \frac{r_{31} - r_{32}r_{21}}{1 - r^2_{21}} = \beta_{31.2}$$

إذن من معادلة إنحدار X_2 على X_1 في المعادلة (2) نحصل على:

$$r_{12} = \beta_{21} = P_{21}$$

ومن معادلة إنحدار X_3 على X_1 و X_2 في المعادلة (3) نحصل على:

$$P_{31} = \beta_{31.2}$$

$$P_{32} = \beta_{32.1}$$

ومن معادلة إنحدار X_4 على X_1 و X_2 و X_3 في المعادلة (4) نحصل على:

$$P_{41} = \beta_{41.23}$$

$$P_{42} = \beta_{42.13}$$

$$P_{43} = \beta_{43.12}$$

(3): معامل عدم التحديد*:

يساهم التحليل الباثي في حساب المعامل الباثي للبواقي ومثال ذلك إمكانية الحصول على P_{4V} على هذا النحو:

$$r_{44} = \frac{1}{N} \Sigma\ Z_4 Z_4 = 1$$

---

* لتوضيح أكثر حول هذا الموضوع يمكن العودة إلى:

(1) Kenneth C. Land, 1969, P. 17.

(2) Otis Dudly Duncan, «Path Analysis: Sociological Examples», In Causal Models in the Social Sciences, gen ed, H. M. Blalock (New York: Aldine Atherton, 1971), PP: 121-122.

وبتبديل Z_4 بقيمتها من المعادلة رقم (4) نحصل على:

$$r_{44} = \frac{1}{N} \Sigma Z_4 (\beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \beta_3 Z_3 + R_V)$$

$$r_{44} = \beta_1 r_{14} + \beta_2 r_{24} + \beta_3 r_{34} + \beta_{4V} r_{4V}$$

$$1 = \beta_1 r_{14} + \beta_2 r_{24} + \beta_3 r_{34} + P^2_{4V}$$

$$P^2_{4V} = 1 - (\beta_1 r_{14} + \beta_2 r_{24} + \beta_3 r_{34})$$

$$P^2_{4V} = 1 - R^2_{4.123}$$

$$P_{4V} = \sqrt{1 - R^2_{4.123}}$$

وهو معامل عدم التحديد.

(4): معيار المعنوية (Criterion of meaningfulness):

يمكن إستخدام معيار المعنوية في التحليل الباثي وذلك لحذف المتغيرات المستقلة من النموذج السببي والتي لا تساهم في رفع قيمة معامل التحديد للنموذج التام بأكثر من 5%، وبذلك نستطيع الحصول على نموذج سببي أفضل لتوقع الظاهرة قيد البحث دون استخدام اختبار F- الإحصائي.

(5): تحليل البواقي ورفض القيم الشاذة في البيانات:

تُعتمد البواقي في تحليل الإنحدار المتعدد مقياساً للخطأ، كما وأن تحليل وفحص البواقي، يُعد ركناً أساسياً في الإنحدار المتعدد، حيث يساعد هذا التحليل على اكتشاف القيم الشاذة (Outliers) في البيانات وعلى اختبار الفروض المتعلقة بالخطأ العشوائي (Examination of residuals is helpful in detecting outliers and testing the assumptions underlying the error term.) ويرى (Anscombe, 1960) بأن رفض القيم الشاذة من البيانات

ليس عملاً حديثاً وإنما يعود إلى عام 1938 في ألمانيا[1]. بينما يرى (Cox and Snell 1968) أن فحص البواقي ورفض القيم الشاذة هما فكرة قديمة، لكنها لم تستعمل على بيانات كثيرة في البحوث إلّا حديثاً[2]. المهم في الأمر، هو أن فحص البواقي يساعد على اكتشاف أخطاء ناتجة عن نقل البيانات أو ترميز المتغيرات وكما يقول (Tukey and Anscombe 1963)، بأن أهم سبب في تحليل البواقي هو اكتشاف القيم الشاذة، علماً أن القيم الشاذة هي عبارة عن مشاهدات (Observations) لها بواقي كبيرة الحجم بحيث تجب معالجتها بشكل خاص[3]، ومثال ذلك استهلاك الفرد للطاقة الكهربائية في البحرين، فمن تفحص الجدول رقم (1) يتضح بأن البحرين لا تنتمي إلى الدول الواردة في الجدول رقم (1)، ويجب معالجتها بشكل خاص، علماً أن (Anscombe 1968) يقترح ضرورة معالجة القيم الشاذة بشكل يختلف عن بقية القيم في البيانات كأن تحذف القيم الشاذة بأجمعها من التحليل[4]. ويذكر المؤلف أن تحليل البواقي في إحدى النماذج السببية الأحادية الإتجاه ساعد على اكتشاف إحدى الأخطاء الناتجة عن نقل البيانات إلى بطاقات الكمبيوتر (Punching error)، وقد أدى تصحيح هذا الخطأ إلى هبوط قيمة معامل التحديد المتعدد للنموذج التام من $R^2=0.31981$ إلى $R^2=0.13061$. كذلك ساعد تحليل البواقي على حذف 26 مشاهدة من البيانات باعتبارها قيم شاذة ناتجة عن عدم فهم 26 شخصاً في العينة لبيانات الإستفتاء، وقد أدى حذف القيم الشاذة إلى

---

(1) F.J. Anscombe, «Rejection of Outliers», Technometrics, 2 (2) (May 1960), P: 125.

(2) O.R. Cox and E.J. Snell, «A general Definition of Residuals». Journal of Royal Statistical Society, Ser. B, (Methodological) 30 (2) (1968), P: 249.

(3) F.J. Anscombe and John W. Tukey, «The Examination and Analysis of Residuals». Technometrics 5 (May 1963) P: 146.

(4) International Encyclopedia of The Social Sciences, 1968 ed, S.V. «Statistical Analysis, Special Problems of, 1. Outliers«. by F.J. Anscombe.

ارتفاع قيمة معامل التحديد المتعدد من 0.13061 إلى 0.18478 للنموذج التام[1].

وأخيراً تجدر الإشارة إلى أن كلاً من (Anscombe, 1973) و (Drapper and Smith, 1966) حددا أربع مشكلات أساسية يمكن فحصها عند تحليل البواقي، وهي مشكلات تلخص ما ورد معنا في الفصل السادس عن موضوع عدم ثبات التباين، وهي كالآتي[2]:

أ ـ اكتشاف القيم الشاذة وحذفها من البيانات إن لم تكن ناتجة عن أخطاء ارتكبها الباحث.

ب ـ اكتشاف إنحدارات ملتوية للبواقي على $\hat{Y}$.

حـ ـ اكتشاف فيما أذا كان تباين البواقي يتغير بتغير $\hat{Y}$.

د ـ اكتشاف فيما إذا كان انتشار البواقي لا يتماشى مع التوزيع المعتدل.

النتائج النهائية للتحليل الباثي:

يوضح الجدول رقم (2) مصفوفة معاملات الإرتباط البسيطة بين المتغيرات التي وردت في الجدول رقم (1) وهي: المتغير الترميزي (الوهمي) لتمييز الدول النفطية عن الدول غير النفطية (X_1)، نسبة مساهمة قطاعي

---

(1) Abdul M.S Charbaji, «Academic and Social Problems Facing Arab Students on American Campuses». A Published Ph.D. Dissertation, Department of Research and Statistical Methodology, Univ., of N. Colorado, U.S.A., 1978. ويوجد في المصدر أعلاه شرح مفصل عن أهمية وكيفية تحليل النماذج الأحادية الإتجاه إضافة إلى تحليل البواقي، وتحليل النماذج السببية للمتغيرات المتعددة (Multivariate Analysis) باستخدام (Elaboration of variables). ويمكن العودة أيضاً إلى كتاب المؤلف «الإنحدار الخطي المتعدد». وزارة التعليم والبحث العلمي جامعة الموصل، عام 1981.

(2) F.J. Anscombe, «Graphs in Statistical Analysis». The American Statistician, 27 (February, 1973), P: 18. and Drapper, N.R. and Smith, H. «Applied Regression Analysis». New York: John Wiley and Sons, 1966.

الصناعة التحويلية والإستخراجية في الناتج المحلي الإجمالي (X_2)، والناتج المحلي الإجمالي للفرد الواحد (X_3)، واستهلاك الفرد للكهرباء (X_4):

الجدول رقم (2)
مصفوفة معاملات الإرتباط البسيطة بين متغيرات الجدول رقم (1)

	X_4	X_1	X_2	X_3
X_4	1.0000	0.5422	0.5872	0.9600
X_1	0.5422	1.0000	0.8062	0.6506
X_2	0.5872	0.8062	1.0000	0.6276
X_3	0.9600	0.6506	0.6276	1.0000

ويمكن استخدام معاملات الإرتباط في الجدول رقم (2)، لإيجاد المعاملات البائية على النحو الآتي:

(أ) من معادلة الإنحدار:

$$Z_3' = \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2$$

يمكننا الحصول على P_{31} و P_{32}، وذلك باستخدام إحدى الطريقتين الآتيتين:

ـ الطريقة الأولى:

$$\beta_{31.2} = P_{31} = \frac{r_{31} - r_{32}r_{21}}{1 - r_{21}^2}$$

$$P_{31} = \frac{0.6506 - (0.6276)\,(0.8062)}{1 - (0.8062)^2} = \frac{0.1446}{0.350042} = 0.4131$$

$$\beta_{32.1} = \frac{r_{32} - r_{31}r_{21}}{1 - r_{21}^2}$$

$$P_{32} = \frac{0.6276 - (0.6506)\ (0.8062)}{1 - (0.8062)^2} = \frac{0.103086}{0.35004156} = 0.2945$$

- الطريقة الثانية:

$$R^{-1} * V = \beta$$

$$\overset{R}{\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.8062 \\ 0.8062 & 1.0000 \end{bmatrix}} \longrightarrow \overset{R^{-1}}{\begin{bmatrix} 2.856810 & -2.303155 \\ -2.303155 & 2.856810 \end{bmatrix}}$$

$$\overset{R^{-1}}{\begin{bmatrix} 2.856810 & -2.303155 \\ -2.303155 & 2.856810 \end{bmatrix}} \overset{V}{\begin{bmatrix} 0.6506 \\ 0.6276 \end{bmatrix}} = \overset{\beta}{\begin{bmatrix} 0.4131 \\ 0.2945 \end{bmatrix}}$$

إذن:

$$P_{31} = 0.4131$$

$$P_{32} = 0.2945$$

(ب) من معادلة الانحدار:

$$\hat{Z_4} = \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \beta_3 Z_3$$

وباستخدام طريقة المصفوفات $R^{-1} * V = \beta$ نحصل على المعاملات البائية كالآتي:

$$\underset{R}{\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.8062 & 0.6506 \\ 0.8062 & 1.0000 & 0.6276 \\ 0.6506 & 0.6276 & 1.0000 \end{bmatrix}} \longrightarrow \underset{R^{-1}}{\begin{bmatrix} 3.169 & -2.080 & -0.756 \\ -2.080 & 3.016 & -0.539 \\ -0.756 & -0.539 & 1.830 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{R^{-1}}{\begin{bmatrix} 3.169 & -2.080 & -0.756 \\ -2.080 & 3.016 & -0.539 \\ -0.756 & -0.539 & 1.830 \end{bmatrix}} \underset{V}{\begin{bmatrix} 0.5422 \\ 0.5872 \\ 0.9600 \end{bmatrix}} = \underset{\beta}{\begin{bmatrix} -0.2291 \\ 0.12578 \\ 1.03029 \end{bmatrix}}$$

إذن :

$$P_{41} = \beta_{41.23} = -0.2291$$
$$P_{42} = \beta_{42.13} = 0.12578$$
$$P_{43} = \beta_{43.12} = 1.03029$$

إذنْ، بعد معرفة قيم المعاملات الباثية أصبح بالإمكان إيجاد الحل للمعادلات (8) و (9) و (10)، اللازمة لتحليل النموذج السببي لمثالنا السابق عن استهلاك الفرد للكهرباء، كالآتي:

أولاً: تأثير وضع البلد (نفطي أو غير نفطي) على استهلاك الفرد للكهرباء، وينقسم إلى:

أ ـ أثر مباشر: $P_{41} = -0.2291$

ب ـ أثر غير مباشر عبر المتغيرات X_2 و X_3:

$$P_{42}P_{21} + P_{43}P_{31} + P_{43}P_{32}P_{21} = (0.12578)\ (0.8061) + (1.03029)\ (0.4131) + (1.03029)\ (0.2945)\ (0.8062) = 0.7716$$

إذن،

$$0.46185 + 0.12578 = 0.5876$$

علماً أن 0.5876 هي نفس قيمة معامل الارتباط البسيط r_{42} والموجودة في الجدول رقم (2) لمصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات.

ثالثاً: أثر الناتج المحلي الإجمالي للفرد الواحد على استهلاك الفرد للكهرباء، وينقسم إلى:

أ- أثر مباشر: $P_{43} = 1.03029$

ب- أثر غير مباشر عبر المتغيرات X_1 و X_2:

$$P_{41}P_{31} + P_{41}P_{32}P_{21} + P_{42\,31}P_{21} + P_{42}P_{32} = (-0.2291)$$
$$(0.4131) + (-0.2291)\ (0.2945)\ (0.8062) + (0.12578)$$
$$(0.4131)\ (0.8062) + (0.12578)\ (0.2945) = -0.0701$$

إذنْ، تغير الناتج المحلي الإجمالي للفرد الواحد بانحراف معياري واحد، سيؤدي إلى تغير مباشر في استهلاك الفرد للكهرباء بقيمة 1.03029 من الانحراف المعياري، وإلى تغير غير مباشر عبر كون البلد نفطي أو غير نفطي وعبر مساهمة الصناعة التحويلية والا ستخراجية في الناتج المحلي الإجمالي بقيمة 0.0701- من الانحراف المعياري، ونظراً لأن:

الأثر الكلي = الأثر المباشر + الأثر غير المباشر

إذنْ،

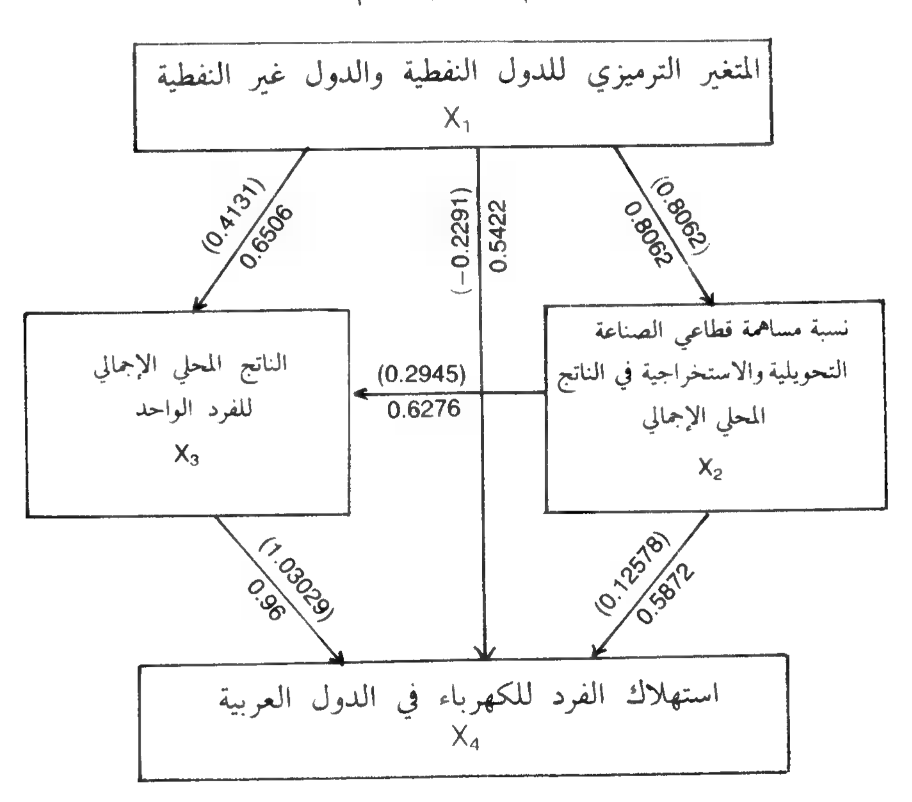
$$1.03029 + (-0.0701) = 0.96$$

علماً أن 0.96 هي نفس قيمة معامل الارتباط البسيط r_{43} والموجودة في الجدول

رقم (2) لمصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات.

ويوضح الرسم البياني رقم (2) النتائج النهائية للتحليل الباثي، علماً أن المعاملات الباثية والتي تقيس الأثر المباشر بين المتغيرات موجودة بين أقواس (Parenthesis)، في حين أن معاملات الارتباط البسيطة بين المتغيرات، موجودة بدون أقواس، كما وأن الفرق بين القيمتين يمثل قيمة الآثار غير المباشرة بين المتغيرين عبر بقية المتغيرات:

الرسم البياني رقم (2)



تقييم الأهمية النسبية للمتغيرات المستقلة في تحديد (تفسير) الإختلافات الكلية في استهلاك الفرد للكهرباء:

أولاً: الأهمية النسبية للمتغير الترميزي (X_1) في تفسير الإختلافات الكلية لإستهلاك الفرد لكهرباء:

$$R^2_{4.1} = (0.5422)^2 = 0.294$$

بمعنى أن كون البلد نفطي أو غير نفطي حدد ما يقارب 30% من الإختلافات الكلية لإستهلاك الفرد للكهرباء، وباستخدام اختبار -F نجد:

$$F = \frac{R^2 \div K}{(1-R^2) \div (N-K-1)} = \frac{0.294 \div 1}{(1-0.294) \div (14-1-1)} = 4.997$$

وعند مستوى المعنوية 5% ودرجات الحرية ($dF_2=12$ ،$dF_1=1$) نجد أن X_1 جوهري من الناحية الإحصائية ويجب إبقائه في النموذج السببي.

ثانياً: الأهمية النسبية للمتغير (X_2) في تنبؤ استهلاك الفرد للكهرباء في الدول العربية:

من معادلة الإنحدار:

$$Z_4' = \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2$$

نحصل على:

$$\beta_1 = 0.1966$$

$$\beta_2 = 0.4287$$

$$R^2_{4.12} = 0.3583$$

بمعنى أن مساهمة قطاعي الصناعة التحويلية والإستخراجية في تفسير الإختلافات الكلية لإستهلاك الكهرباء يزيد إلى ما كان قد ساهمه (X_1) بمقدار:

$$R^2_{4.12} - R^2_{4.1} = 0.3583 - 0.294 = 0.0643$$

بمعنى أن (X_2) تزيد على ما كان قد ساهمه (X_1) بمقدار 6% في تفسير الإختلافات الكلية في استهلاك الفرد للكهرباء، وباستخدام اختبار F– الإحصائي:

$$F = \frac{(R_F^2 - R_R^2) \div (K_1 - K_2)}{(1 - R_F^2) \div (N - K_1 - 1)} = \frac{(0.3583 - 0.294) \div (2-1)}{(1-0.3583) \div (14-2-1)} = 1.10$$

نجد أن (X_2) لا تساهم جوهرياً من الناحية الإحصائية في تفسير الإختلافات الكلية في استهلاك الفرد للكهرباء، وبالتالي بإمكاننا حذف X_2 من النموذج السببي للحصول على نموذج سببي أفضل وأبسط من النموذج الموضح في الرسم البياني رقم (2).

ثالثاً: الأهمية النسبية للناتج المحلي الإجمالي للفرد الواحد في تفسير الإختلاف في استهلاك الفرد للكهرباء:

من معادلة الإنحدار:

$$\hat{Z}_4 = \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \beta_3 Z_3$$

نحصل على معامل التحديد للنموذج التام:

$$R^2_{4.123} = 0.9387$$

بمعنى أن (X_3) يساهم بمقدار:

$$0.9387 - 0.3583 = 0.58042$$

58% في تفسير الإختلافات الكلية لإستهلاك الفرد للكهرباء، وباستخدام اختبار F– الإحصائي نجد أن:

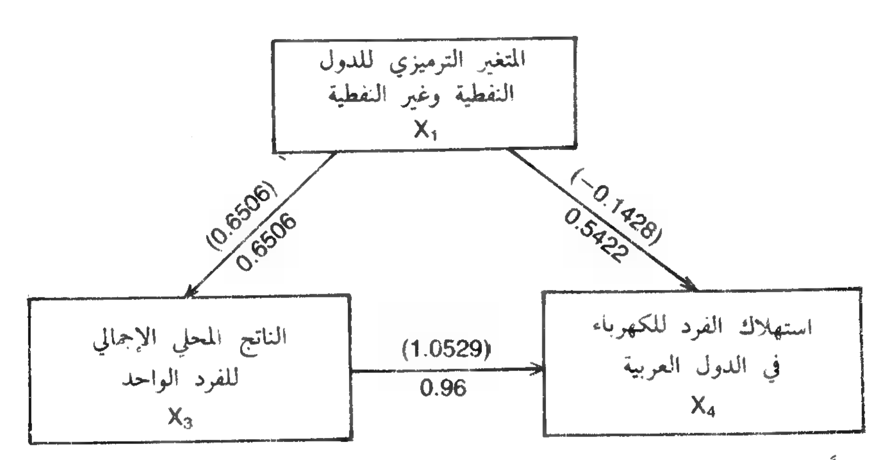
$$F = \frac{(R^2_{4.123} - R^2_{4.12}) \div (K_1 - K_2)}{(1 - R^2_{4.123}) \div (N - K_1 - 1)}$$

$$F = \frac{0.58042 \div (3-2)}{(1-0.9387) \div (14-3-1)} = 94.69$$

وهي قيمة جوهرية من الناحية الإحصائية.

ونظراً لأن (X_2) غير جوهري من الناحية الإحصائية في تفسير الظاهرة (X_4)، لذلك باستطاعتنا حذف (X_2) والحصول على النموذج السببي الأحادي الإتجاه والموضح أدناه في الرسم البياني رقم (3):

الرسم البياني رقم (3)



علماً أن معامل التحديد المتعدد للنموذج الموضح في الرسم البياني رقم (3) هو: $R^2_{4.13} = 93.3\%$ وتجدر الإشارة أخيراً، إلى أن تقييم الأهمية النسبية للمتغيرات المستقلة في تنبؤ المتغير التابع، يصبح له معنى عند استخدامه من خلال النماذج السببية الأحادية الإتجاه، ذلك أن مساهمة المتغيرات جميعها في تحديد تباين المتغير التابع، (بمعنى ان قيمة معامل التحديد للنموذج التام) تبقى واحدة مهما اختلفت تراتيب المتغيرات المستقلة، لكن المساهمة النسبية للمتغير المستقل في تحديد تباين المتغير التابع تختلف بإختلاف ترتيب المتغير المستقل في معادلة الإنحدار، ويمكن توضيح ذلك بالعودة إلى الرسم البياني رقم (2)، فنلاحظ أن (X_3) ساهم بتفسير 58% من الإختلافات الكلية في المتغير التابع، لكن لو أننا أدخلنا (X_3) في بداية معادلة الإنحدار لكان قد ساهم بنسبة $(0.96)^2 = 92.16\%$ كذلك تجدر الإشارة إلى ضرورة إدخال متغيرات تفسيرية

أخرى في النموذج ومثال ذلك المستوى الثقافي للبلد.

مثال (2): تفسير ظاهرة الإختلاف في واردات الدول العربية من المواد المصنوعة، في نموذج سببي أحادي الإتجاه:

يوضح الجدول رقم (2)، واردات الدول العربية من المواد المصنوعة X_3 (وتشتمل على البضائع المصنوعة Manufactured Articles وآلات ومعدات النقل Machinery & Equipment وعلى المواد الكيمائية Chemicals)، بالمليون دولار أميركي[1]، والإنفاق الإستثماري X_2 بالمليون دينار عربي حسابي[2]، والناتج المحلي الإجمالي X_1 بالمليون دولار أميركي[3]، لعام 1978:

الجدول رقم (2)

واردات الدول العربية من المواد المصنوعة (X_3)، الناتج المحلي الإجمالي، (X_1)، والإنفاق الإستثماري (X_2) لعام 1978

البلد	X_3	X_2	X_1
البحرين	974.5	103.64	1877.1
مصر	4466.5	1572.41	24715.2
العراق	3597.56	2524.32	23124.4
الأردن	1018.03	99.96	1856.4
الكويت	3837.51	478.14	15281.3
ليبيا	3709.62	1233.13	19045.7
الصومال	163.84	8.31	1192.2
سوريا	1580.69	405.29	8277.3
اليمن الشمالي	842.17	124.70	2618.5
اليمن الجنوبي	68.48	46.05	545.7
الوسط الحسابي	**2025.89**	**659.60**	**M: 9853.38**
الإنحراف المعياري	**1685.33**	**846.30**	**S: 9746.82**

(1) اللجنة الإقتصادية لغربي آسيا، «المؤشرات الإحصائية للعالم العربي للفترة 1970-1978»، ص ص: 153-156.

(2) التقرير الإقتصادي العربي الموحد، عام 1981، ص: 249.

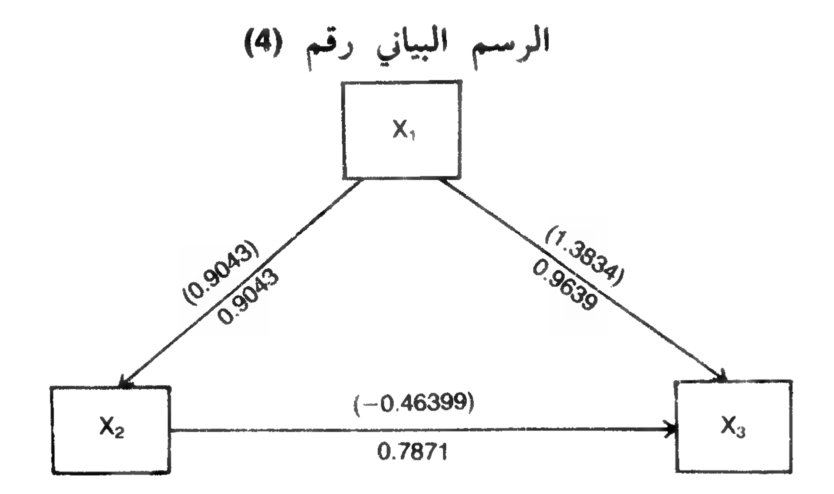
(3) التقرير الإقتصادي العربي الموحد، عام 1981، ص: 190.

ويبين الرسم البياني رقم (4)، النتائج النهائية للتحليل الباثي . علماً أن R^2 للنموذج التام هي: $R^2_{3.12} = 0.97 = 97\%$. بمعنى أن 97% من الإختلافات في واردات الدول العربية من المواد المصنوعة، ثم تحديدها بالإختلافات في الناتج المحلي الإجمالي، والإختلافات في الإنفاق الإستثماري، علماً أن اختبار -F الإحصائي يدل على أن كلاً من X_1 و X_2 جوهرية من الناحية الإحصائية في توقع X_3.

مصفوفة معاملات الإرتباط بين متغيرات الجدول رقم (2)

	X_1	X_2	X_3
X_1	1.0000	0.9043	0.9639
X_2	0.9043	1.0000	0.7871
X_3	0.9639	0.7871	1.0000

الرسم البياني رقم (4)



الفصل الثامن
نموذج المعادلات الآنية

تمهيد:

تم في الفصل السابق مناقشة بعض النماذج الأحادية الاتجاه، وهي نماذج تتميز بالبساطة حيث تتم معالجة كل معادلة انحدار بمفردها ثم تجمع النتائج في نموذج متكامل تنعدم فيه العلاقات المتبادلة (Reciprocal causation)، فإذا كان المتغير X سبباً للمتغير Y فلا يمكن للمتغير Y أن يكون سبباً للمتغير X في آنٍ واحد. الجدير بالذكر، أن مثل هذه النماذج قد تبدو بعيدة عن الواقع ذلك أن واقع الحياة هو أكثر تعقيداً من أن يصاغ في نموذج أحادي الاتجاه ولا بد للباحث من أن يأخذ في الاعتبار إمكانية حدوث علاقات عكسية بين المتغيرات داخل النموذج حيث يتأثر المتغير Y بالمتغير X وفي ذات الوقت يؤثر المتغير Y بالمتغير X.

مشكلة تحديد النموذج:

إن مشكلة تحديد النموذج (The identification problem) هي مشكلة خاصة بموضوع الاقتصاد القياسي، ناتجة عن وجود علاقة بين المتغير المستقل وبين المتغير العشوائي في معادلة الانحدار، وتتلخص هذه المشكلة بعدم القدرة على إيجاد قيم فريدة (Unique values) لمعاملات المعادلات الهيكلية

(Structural equations) من خلال معرفتنا بتقديرات النموذج المصغر (The reduced form).

الجدير بالذكر، أن هذه المشكلة ليست مشكلة إحصائية، فهي لا تنحصر في كيفية استخدام تحليل الانحدار استخداماً صحيحاً ، كما وأنها لا تنحصر في كيفية تفسير نتائج التحليل تفسيراً صحيحاً وإنما تتناول علاقة الأداة الإحصائية (تحليل الانحدار المتعدد) بالنظرية الاقتصادية، وبشكل أدق فهي تتناول كيفية قياس (Measurability) أية معادلة هيكلية في النموذج الاقتصادي للمعادلات الآنية.

لقد مرّ معنا أنه باستطاعة الباحث معالجة العلاقات الاقتصادية باستخدام معادلة انحدار (تقدير) واحدة، كأن يدرس مثلاً أثر كلٍ من الحرارة (T_t) والأمطار (R_t) على الناتج الزراعي (Y_t) في نموذج بسيط كالآتي:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 T_t + \alpha_2 R_t + U_t$$

وعلى الرغم من أن العوامل كالحرارة والأمطار هي متغيرات غير قابلة لوضع الرقابة عليها (Nonexperimental variables) وخارجة عن قدرة الباحث على التحكم في اختلافاتها، إلا أنه باستطاعة الباحث اعتبار أن هذه المتغيرات المستقلة ناتجة عن توزيعات احتمالية مختلفة ومتعلقة بتكوين السحب، وسرعة الرياح و. . . الخ وبالتالي فباستطاعة الباحث افتراض أن:

$$E(T_t U_t) = 0$$
$$E(R_t U_t) = 0$$

أي أنه باستطاعة الباحث، افتراض انعدام العلاقة بين المتغير المستقل وبين الخطأ العشوائي، وبإمكانه حينئذٍ استخدام طريقة المربعات الصغرى (OLS)، في الحصول على تقديرات معاملات الانحدار. علماً أنه قد يشعر

الباحث أن النموذج أعلاه بسيط ولا يفي بالحاجة من حيث توقع الظاهرة، فيلجأ إلى إدخال بعض التعقيدات على هذا النموذج، كأن يدخل المتغير T_t^2، في النموذج إنطلاقاً من أنه يمكن للحرارة أن ترتفع تدريجياً إلى حدٍ معين ثم تأخذ في الانخفاض تدريجياً، كذلك فقد يلجأ الباحث إلى إدخال أثر التفاعل (Interaction) بين الحرارة والأمطار ($T_t.R_t$) على المحصول الزراعي، أو يلجأ إلى إدخال عوامل أخرى مؤثرة كالسماد (F_t) والآلات (M_t) الخ، وفي توفيقه لمنحنى العلاقة فإنه يلجأ إلى اختيار الثوابت التي تجعل مجموع مربع البواقي عند نهايتها الصغرى.

لا شك أن إدخال تعقيدات جديدة على نموذج الانحدار البسيط قد يوقع الباحث في مشاكل جديدة، ففي مثالنا أعلاه، نلاحظ أن العوامل مثل السماد والأيدي العاملة، تختلف عن العوامل مثل الحرارة والأمطار في أن العوامل الأولى قد تتحدد بسعر السوق والذي بدوره يتحدد بعرض السماد وبكمية الناتج الزراعي. الخ وبالتالي لم يعد باستطاعة الباحث افتراض انعدام العلاقة بين المتغير المستقل وبين المتغير العشوائي في معادلة الانحدار الآتية:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 T_t + \alpha_2 T_t^2 + \alpha_3 R_t + \alpha_4 T_t \,.\, R_t + \alpha_5 F_t + \alpha_6 M_t + \alpha_7 L_t + \dots\dots + U_t$$

نظراً لأن السماد (F_t) يحدد الناتج الزراعي (Y_t) ويتحدد به فلم يعد بالإمكان افتراض أن $E(F_t U_t) = 0$، كذلك لم يعد باستطاعة الباحث استخدام طريقة المربعات الصغرى في تقدير معالم النموذج، وعليه أن يوسّع نموذجه البسيط المكوّن من معادلة انحدار واحدة، وذلك باستخدام نموذجاً أوسع ومؤلف من عددٍ من المعادلات الهيكلية، مما يوجب حينئذٍ استخدام طرقاً مختلفة ـ عن طريقة المربعات الصغرى ـ في تقدير معالم النموذج. علماً أنه إذا لجأ الباحث إلى استخدام الطريقة الإعتيادية للمربعات الصغرى في تقدير معالم

النموذج لمثالنا أعلاه فسيحصل على تقديرات انحدار متحيزة (Biased estimates)، كما وأن زيادة حجم العينة سوف لن يُلغي هذا التحيز (Inconsistency of OLS estimators) . فعلى افتراض أن النموذج أعلاه يتكون من انحدار الناتج الزراعي على السماد، كالآتي:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha F_t + U_t$$

وعلى افتراض أن المتغيرات مقاسة في شكل انحرافات عن الوسط الحسابي، فإنه باستطاعة الباحث صياغة المعادلة كالآتي:

$$Y_t = \alpha F_t + U_t$$

وبضرب طرفي المعادلة أعلاه بالمتغير F_t وجمع الناتج نحصل على:

$$\Sigma F_t Y_t = \alpha_t \Sigma F_t^2 + \Sigma F_t U_t$$

إذن:

$$\alpha_t = \frac{\Sigma F_t Y_t}{\Sigma F_t^2} - \frac{\Sigma F_t U_t}{\Sigma F_t^2}$$

نظراً لوجود العلاقة بين المتغير المستقل F_t والمتغير العشوائي U_t، فإن $E(F_t U_t) \neq 0$ وبالتالي فإن قيمة معامل الانحدار α_t لا تساوي $\frac{\Sigma F_t Y_t}{\Sigma F_t^2}$ وبمعنى أدق، فإن معامل الإنحدار α_t يعتبر متحيزاً كما وأن زيادة حجم العينة لن يلغي هذا التحيز لأن $\Sigma F_t U_t$ لن تقترب من الصفر بزيادة حجم العينة.

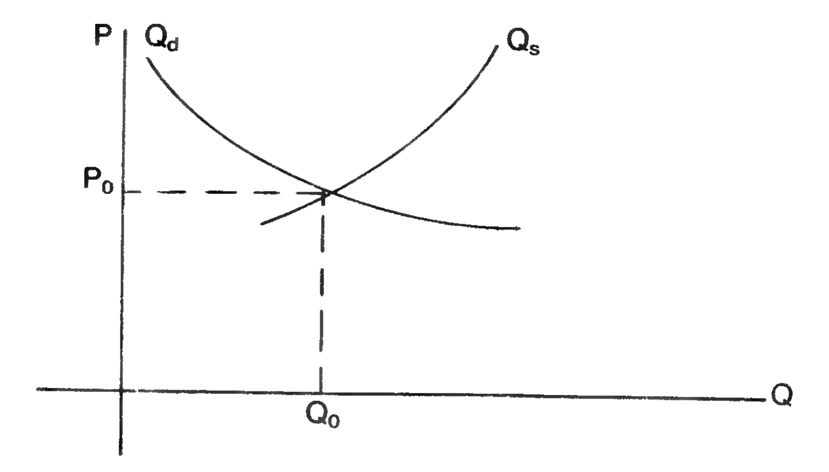
إذن، نخلص إلى أن مشكلة التحديد تظهر في النموذج الاقتصادي بسبب مخالفة الفرضية $E(XU) = 0$، مما يؤدي إلى إعطاء قيم متحيزة لمعاملات الانحدار عند استخدام الباحث لطريقة المربعات الصغرى في تقدير معالم النموذج. دعنا للتبسيط نأخذ مثالاً يوضح تحديد ثمن السلعة وكمية التوازن في

ظروف المنافسة الكاملة. فمن المعلوم أن عرض السلعة Q_s هو الكمية التي يقبل البائعون بيعها عند مستوى معين للأسعار كما وأن الطلب Q_d هو مقدار ما يقبل المشترون شراءه من هذه السلعة عند مستوى معين للأسعار، وبالتالي فإن كلاً من العرض والطلب عرضة للتقلب والتغير تبعاً لتقلبات الأسعار (P)، ويمكننا توضيح كيفية تحديد Q_s و Q_d بالأسعار بالنموذج البسيط الآتي:

$$Q_s = a_0 + a_1P$$

$$Q_d = b_0 + b_1P$$

حيث اعتبرنا أن العلاقة بين الكمية المطلوبة أو المعروضة والأسعار في السوق علاقة تامة، فحذفنا الخطأ العشوائي e من معادلة التقدير والذي يقيس أثر المتغيرات الأخرى غير السعر على الكمية المطلوبة أو المعروضة. الجدير بالذكر، أن هذا النموذج يوضح أيضاً أن الطلب وحده، أو العرض وحده، لا يمكن أن يدلنا على الثمن الذي ستباع به السلعة، حيث يتحدد الثمن بتفاعل قوى كل من العرض والثمن. فهذا الثمن هو ثمن التوازن الذي تتساوى عنده قوى الطلب من جانب المشترين مع قوى العرض من جانب البائعين $Q_d = Q_S = Q$، فإذا كانت الكمية المعروضة، أكبر من الكمية المطلوبة، فحينئذٍ يضطر البائعون إلى سحب وتخزين جزء من الكمية المعروضة، وخفض الأثمان، بحيث تتكافىء رغبات البائعين مع رغبات المشترين، كذلك فلو حدث وأن كانت الكمية المطلوبة، أكبر من الكمية المعروضة. في السوق لاضطر المشترون إلى دفع ثمن أعلى لإغراء البائعين على البيع إلى أن يستقر الثمن في السوق، عند ثمن التوازن P_0 والذي تتساوى عنده الكمية المعروضة مع الكمية المطلوبة $Q_d = Q_s = Q_0$، كما يتضح بيانياً في الشكل الآتي:



ويمكن صياغة ما سبق ذكره بالنموذج البسيط، كالآتي:

$$Q = a_0 + a_1P \quad (1)$$

$$Q = b_0 + b_1P \quad (2)$$

يبين النموذج أعلاه أننا ندرس العلاقة بين المتغيرين Q و P باستخدام معادلتين بدلاً من استخدام معادلة واحدة. دعنا نستبدل الكمية Q في المعادلة الأولى بقيمتها من المعادلة الثانية:

$$a_0 + a_1P = b_0 + b_1P$$

$$a_0 - b_0 = b_1P - a_1P$$

$$\bar{P} = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} \quad (3)$$

دعنا نستبدل السعر P في المعادلة الأولى بقيمتها من المعادلة الثانية:

$$Q = a_0 + a_1 \left(\frac{(Q - b_0)}{b_1}\right)$$

$$b_1Q - a_1Q = b_1a_0 - a_1b_0$$

$$\bar{Q} = \frac{b_1a_0 - a_1b_0}{b_1 - a_1} \quad (4)$$

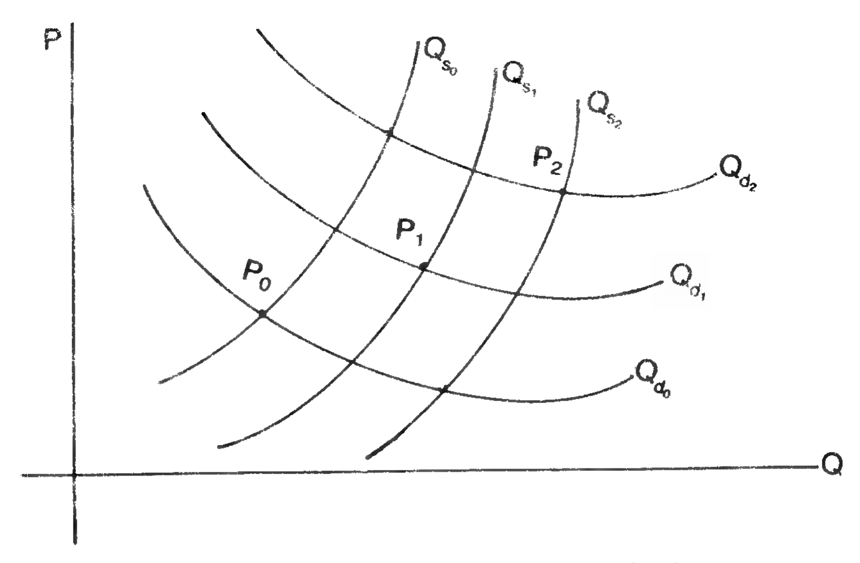
تشكل المعادلات (3) و (4) ما يعرف بالنموذج المصغر الذي حصلنا عليه من نموذج المعادلات الهيكلية (1) و (2)، مع الإشارة إلى أن نموذج المعادلات الهيكلية، يتكون من متغيرين داخليين Q و P، ومن معادلتين، لذلك فنموذج المعادلات الهيكلية يعتبر كاملاً من الناحية الرياضية (Mathematically complete)، حيث يتضمن النموذج لعددٍ من المعادلات مساوٍ لعدد المجاهيل. بينما نجد أن النموذج المصغر من المعادلات (3) و (4) يحتوي على Q و P وعلى المجاهيل a_0 ، b_0 ، a_1 ، وb_1 ، علماً أنه إذا جمع الباحث بيانات فِعلية عن P و Q فإنه يمكنه الحصول على قيم فعلية لكمية وثمن التوازن (Q,P) وبالتالي فلا توجد صعوبة بالنسبة للباحث في تحديد قيم P و Q. لكن مشكلة التحديد في الاقتصاد القياسي والتي يعاني منها الباحث، هو عدم إمكانية الحصول على تقديرات لمعالم نموذج المعادلات الهيكلية (b_1 ، b_0 ، a_0 و a_1)، من خلال معرفته بالمتغيرات Q و P. ففي المعادلة (4) مثلاً، يعلم الباحث من بياناته قيمة Q (في المعدل) لكنه لا يعلم قيمة بقية المجاهيل، في المعادلة:

$$\overline{Q} = \frac{b_1a_0 - a_1b_0}{b_1 - a_1}$$

بمعنى أنه يوجد عدد لا نهائي من القيم للمعالم a_0 ، a_1 ، b_0 و b_1، والتي تعطي القيمة Q. كذلك هو الحال بالنسبة للمعادلة (3) فيوجد عدد لا نهائي من قيم المعالم a_0 ، a_1 ، b_0 و b_1، والتي تعطي القيمة $\overline{P}$. وباختصار يمكننا القول أن النموذج المصغر يتكون من المعادلتين (3) و (4) ومن أربعة مجاهيل a_0 ، b_0 ، a_1 و b_1 ولا يمكن للباحث إيجاد الحل لهاتين المعادلتين إلا إذا توافرت معلومات أخرى إضافة إلى الكمية والسعر. وبذلك نخلص إلى أن كلاً من معادلتي العرض والطلب غير محددة (Unidentified or under identified) في النموذج لمثالنا السابق عن توازن السوق، ذلك لأن الباحث غير

قادر على إيجاد قيم لمعالم نموذج المعادلات الهيكلية a_0 ، b_0، a_1 و b_1 من خلال معرفته بتقديرات النموذج المصغر. فنخلص إلى أن مشكلة التحديد موجودة في نموذج المعادلات الهيكلية على الرغم من أن نموذج المعادلات الهيكلية يعتبر كاملاً من الناحية الرياضية، كما وأن مشكلة التحديد موجودة في نموذج المعادلات الهيكلية على الرغم من أنه لا يوجد مشكلة إحصائية في تقدير النموذج المصّغر. فمشكلة التحديد كما ذكرنا سابقاً ليست مشكلة إحصائية، وإنما هي مشكلة خاصة بالاقتصاد القياسي وتتلخص في عدم قدرة الباحث على الحصول على قيم فريدة (Unique values) للمعالم a_0 ، a_1 ، b_0 ، b_1 ، حيث يوجد عدد لا نهائي من القيم لهذه المعالم والتي تعطي القيم P أو Q في المعادلتين (3) و (4) في مثالنا السابق. وقد نتج ذلك بالطبع بسبب وجود علاقة عكسية بين P و Q، ولا بد للباحث من الحصول على معلومات أخرى تساعده في تحديد النموذج.

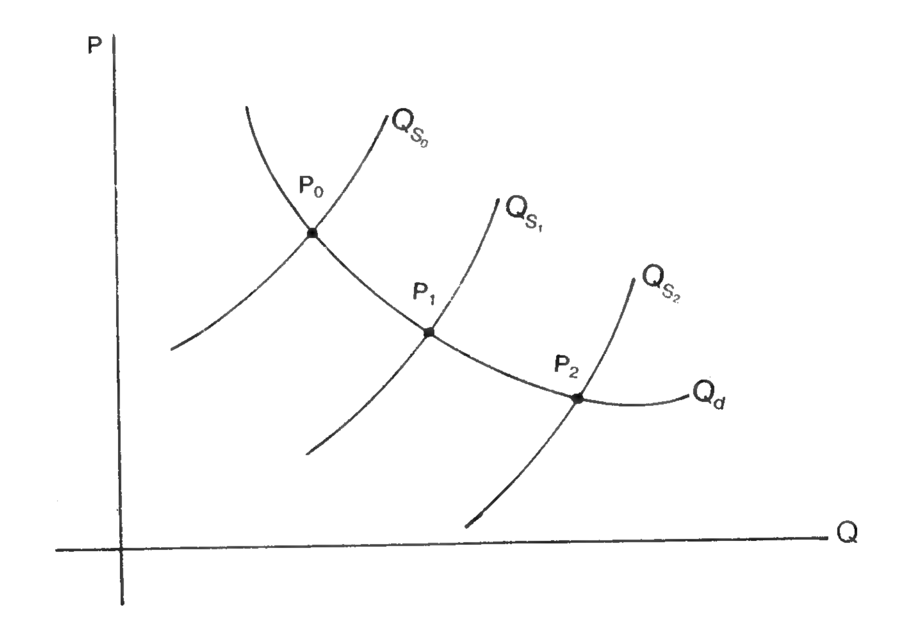
لقد افترضنا في مثالنا السابق ثبات ظروف كل من العرض والطلب، حيث افترضنا أن السعر يحدد الكمية المطلوبة أو المعروضة، كما وأن السعر يتحدد بالكمية المطلوبة أو المعروضة، حيث يتم معالجة الاختلال في التوازن بالانتقال على نفس منحنى الطلب أو بالانتقال على نفس منحنى العرض إلى أن يتحقق التوازن من جديد. الجدير بالذكر، أنه ليس من الضروري أن نفترض ثبات ظروف العرض أو الطلب حيث أن كلاً من العرض والطلب قد يتغير في اتجاهات مختلفة بسبب عوامل أخرى غير السعر تعمل على انتقال منحنى العرض أو منحنى الطلب بأكمله جهة اليمين أو جهة اليسار، فتتغير بذلك نقطة التوازن. فقد تكون نقطة التوازن (P_0Q_0) في الفترة T_0 فتصبح (P_1,Q_1) في الفترة T_1 و... الخ كما يتضح في الشكل البياني الآتي:



ولنفرض أن أحد الباحثين جمع بيانات زمنية عن الكمية المتبادلة في السوق عند الأسعار المختلفة، فلا شك بأن هذه البيانات هي عبارة عن أزواج من المشاهدات تمثل كمية وسعر التوازن في الفترة الزمنية الأولى، وفي الفترة الزمنية الثانية و. . . الخ. وقد يلجأ الباحث إلى رسم العلاقة بين الكمية والسعر بيانياً، ويخلص إلى أنه يدرس دالة الطلب أو دالة العرض اعتماداً على شكل الرسم البياني. وهنا تبدأ مشكلة الباحث من وجهة نظر الاقتصاد القياسي، فقد يعتقد الباحث أنه يدرس دالة الطلب، أو قد يعتقد أنه يدرس دالة العرض، لكنه في الحقيقة يدرس هجين (Hybrid) مكون من دالتي العرض والطلب معاً. وبمعنى أدق فإن الباحث جمع بيانات عن الكمية والسعر وهذه البيانات هي في الحقيقة نقاط توازن (P_1,Q_1) ، (P_2,Q_2) و. . . الخ تحددت بتقاطع منحنيي العرض والطلب في فترات مختلفة، وبالتالي فهي غير كافية لتحديد دالة العرض أو دالة الطلب، فهي نقاط توازن متعددة عبر الزمن، ولا بد للباحث من الحصول على معلومات إضافية لتحديد دالة العرض أو تحديد دالة الطلب أو كليهما.

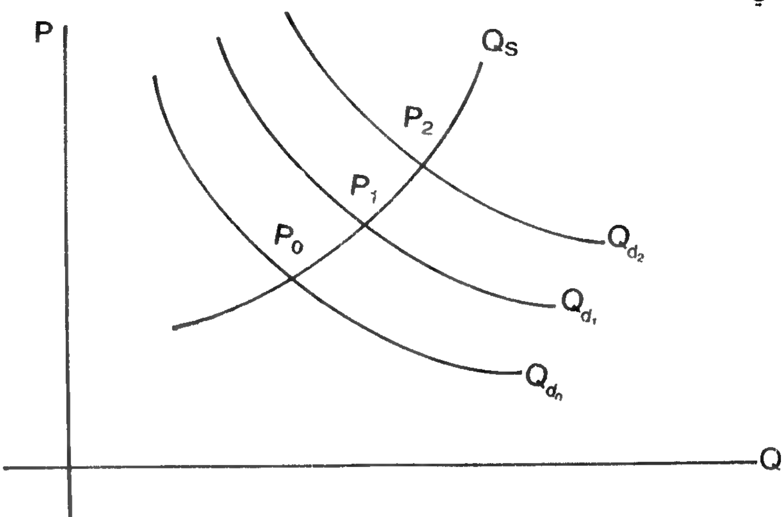
دعنا الآن نفترض ثبات ظروف دالة الطلب، في حين أن دالة العرض

وبسبب عوامل أخرى غير السعر تنتقل (Shifts) من مكانها (علماً أنه يمكن لدالة العرض أن تنتقل من مكانها بسبب عوامل أخرى تتعلق بتغير تكاليف الانتاج ـ Changes in production costs ـ أو أثمان عوامل الانتاج كالأجور والربح، أو بسبب فرض ضريبة ـ Tax ـ على الانتاج، أو بسبب اكتشاف طريقة جديدة للانتاج بتكلفة أرخص، أو بسبب الأمطار الخ. وهي عوامل تؤثر في دالة العرض دون التأثير في دالة الطلب ـ على الأقل في المدى القصير ـ). فإذا أمكن للباحث من أن يحدد كل أو بعض هذه العوامل التي تعمل على نقل دالة العرض من مكانها دون التأثير بدالة الطلب، أمكنه حينئذٍ أن يتتبع (يحدد) منحنى الطلب (Identify ot Trace out the demand equation)، كما يتضح في الرسم البياني الآتي:



كذلك الحال لو افترضنا ثبات ظروف دالة العرض في حين علم الباحث بعوامل أخرى غير السعر عملت على نقل دالة الطلب من مكانها (مثل تغير الدخل، الأذواق، انتشار البيع بالتقسيط، شدة الإقبال على سلعة معينة في

موسم معين، أو زيادة عدد المستهلكين، أو ارتفاع أثمان السلع البديلة .. الخ.) لأمكنه حينئذٍ تحديد (تتبع) منحنى العرض كما يتضح في الرسم البياني الآتي:



ويمكن تلخيص ما سبق ذكره، بأن نموذج المعادلات الهيكلية المكوّن من المعادلات (1) و (2) غير محدد ولا بدّ للباحث من الحصول على معلومات إضافية ـ غير الكمية والسعر ـ حتى يتمكن من تحديد دالة العرض أو دالة الطلب أو كليهما. وهو أمرٌ يتطلب بالطبع تعديل النموذج الأساسي للتحليل[1].

دعنا نفترض أن الباحث في مثالنا السابق، قرر أن يدخل متغيراً مستقلاً جديداً في دالة العرض وليكن (R)، حيث تمثل R كمية الأمطار، فهل باستطاعته الآن تحديد دالة العرض، أو دالة الطلب، أو كليهما؟ علماً أنه بإدخال المتغير الجديد، فإن نموذج المعادلات الهيكلية يصبح كالآتي:

$$Q_S = a_0 + a_1P + a_2R + U_1$$

$$Q_d = b_0 + b_1P + U_2$$

(1) Hubert M. Blalock Jr., «Theory Construction» Prentice-Hall International, Inc., 1969, PP: 50-59.

حيث أن:

$$Q_d = Q_S = Q$$

وهنا نلاحظ أنه نظراً لأن المتغير المستقل R هو متغير خارجي (Exogenous) وعديم العلاقة بالمتغير العشوائي U_2 فباستطاعة الباحث استخدام هذا المتغير في شكل متغير وسيلي (Instrumental variable) في دالة الطلب الآتية:

$$Q = b_0 + b_1P + U_2$$

وعلى إفتراض أن المتغيرات مقاسة في شكل إنحرافات عن الوسط الحسابي فإن $b_0=0$ وتصبح الدالة، كالآتي:

$$Q = b_1P + U_2$$

وبضرب طرفي المعادلة بالمتغير الوسيلي R وجمع طرفي المعادلة نحصل على:

$$\Sigma RQ = b_1 \ \Sigma RP + \Sigma RU_2$$

ونظراً لإنعدام العلاقة بين R و U_2 فإن $\Sigma RU_2=0$ وبذلك نخلص إلى أن:

$$b_1 = \frac{\Sigma RQ}{\Sigma RP}$$

وبالتالي فقد تمكن الباحث من تحديد معالم النموذج الهيكلي لدالة الطلب، وذلك من خلال معرفته بمتغير آخر موجود في دالة العرض. أما دالة العرض في مثالنا أعلاه فبقيت بدون تحديد، ولا بدّ للباحث من الحصول على معلومات إضافية لتحديد دالة العرض، أي لا بدّ للباحث من التعرف على عوامل تنقل دالة الطلب دون دالة العرض حتى يتمكن من تتبع دالة العرض. ويقال عن دالة العرض في مثالنا الأخير بأنها غير محددة (Under Identified) في حين يقال عن دالة الطلب في مثالنا الأخير بأنها محددة تماماً (Exactly Identified).

دعنا نفترض الآن أن الباحث قرر إدخال المتغير (Y) في دالة الطلب،

حيث تمثل Y الدخل الفردي المتاح، ذلك بالإضافة إلى إدخاله المتغير (R) الذي يمثل الأمطار في دالة العرض. في مثل هذه الحالة يصبح نموذج المعادلات الهيكلية كالآتي:

$$Q_S = a_0 + a_1P + a_2R + U_1$$

$$Q_d = b_0 + b_1P + b_2Y + U_2$$

نلاحظ في هذه الحالة أن دالتي العرض والطلب أصبحتا محددتين تماماً، حيث يساعد المتغير الخارجي R والموجود في دالة العرض على تحديد الدالة التي حُذف منها وهي دالة الطلب، في حين يساعد المتغير الخارجي Y والموجود في دالة الطلب على تحديد الدالة التي حُذف منها وهي دالة العرض.

ولنفرض أخيراً أن الباحث أراد إضافة متغير خارجي جديد (T) لدالة العرض، حيث تمثل T الزمن، فحينئذٍ يصبح النموذج كالآتي:

$$Q_S = a_0 + a_1P + a_2R + a_3T + U_1$$

$$Q_d = b_0 + b_1P + b_2Y + U_2$$

نلاحظ في هذه الحالة الأخيرة أنه يوجد متغيران خارجيان محذوفان من معادلة الطلب (R و T) وهذا يفوق حاجة الباحث لتحديد دالة الطلب فنقول حينئذٍ أن دالة الطلب تعاني من مشكلة فوق التحديد (Over Identification).

ويثار التساؤل أخيراً، هل يوجد طريقة سهلة لمعرفة فيما إذا كانت المعادلة محددة تماماً، أو غير محددة، أو تعاني من مشكلة فوق التحديد، في نموذج اقتصادي يتكون من العديد من المعادلات والعديد من المتغيرات؟ وهنا نلاحظ ما يلي[1]:

---

(1) Wonnacott & Wonnacott, PP: 172-189.

أولاً : تعتبر أي معادلة في نموذج من المعادلات الآنية محددة تماماً (Exactly Identified) إذا كان عدد المتغيرات الخارجية المحذوفة من هذه المعادلة مساوياً تماماً إلى عدد المتغيرات الداخلية (في هذه المعادلة) ناقصاً واحد.

ثانياً : تعتبر أي معادلة في نموذج من المعادلات الآنية دون مستوى التحديد (Under Identified) إذا كان عدد المتغيرات الخارجية المحذوفة من هذه المعادلة أقل من عدد المتغيرات الداخلية (في هذه المعادلة) ناقصاً واحد.

ثالثاً : تعتبر أي معادلة في نموذج من المعادلات الآنية فوق مستوى التحديد (Over Identified) إذا كان عدد المتغيرات الخارجية المحذوفة من هذه المعادلة أكبر من عدد المتغيرات الداخلية (في هذه المعادلة) ناقصاً واحد.

فلو أخذنا النموذج الآتي للعرض والطلب من سلعة ما:

$$D = a_0 + a_1P + a_2Y + U_1$$

$$S = b_0 + b_1P + U_2$$

$$D = S$$

لوجدنا أن دالة الطلب هي دالة دون مستوى التحديد، لأنها لا تستبعد أي متغير خارجي موجود في النموذج، في حين نجد أن دالة العرض هي دالة محددة تماماً، لأن عدد المتغيرات الداخلية في دالة العرض (P و S) ناقصاً واحد، يساوي عدد المتغيرات الخارجية الموجودة في النموذج والمحذوفة من معادلة العرض (Y).

علماً أنه يمكننا الوصول إلى نفس النتيجة باستخدام المحددات (Determinants).

فلنفرض أننا نرغب في معرفة فيما إذا كانت المعادلة محددة أو غير محددة في نموذج بسيط كالآتي:

$$D = a_0 + a_1P + a_2Y + U_1$$

$$S = b_0 + b_1P + U_2$$

$$D = S$$

فيمكننا صياغة النموذج أعلاه بإدخال كل المتغيرات في المعادلة كالآتي:

$$(1)\ D + (0)\ S - a_1P - a_2Y - a_0 = U_1$$

$$(0)\ D + (1)\ S - b_1P - (0)Y - b_0 = U_2$$

$$(1)\ D - (1)\ S - (0)\ P - (0)\ Y - 0 = 0$$

كذلك يمكننا صياغة النموذج أعلاه في شكل مصفوفات كالآتي:

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a_1 & -a_2 & -a_0 \\ 0 & 1 & -b_1 & 0 & -b_0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \overset{x}{\begin{bmatrix} D \\ S \\ P \\ Y \\ I \end{bmatrix}} = \overset{b}{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

حيث أضفنا المتغير الترميزي (1) إلى الموجه X وذلك لنتمكن من الحصول على قيم الثوابت a_0، b_0 (intercepts).

لنفرض أننا نرغب في معرفة فيما إذا كانت دالة الطلب محددة أو غير محددة، فإننا نستخدم في المصفوفة A العمود الثاني، لأن هذا العمود (Column) يحتوي على الصفر (0)، في الصف (Raw) الأول من المصفوفة، وهو الصف الخاص طبعاً بدالة

الطلب. يدل المعامل صفر على أنه يوجد متغير خارجي محذوف من هذه المعادلة.

فلو أخذنا العمود الثاني من المصفوفة A لحصلنا على الموجه $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، أما درجة (Rank) هذا الموجه (Vector) فهو واحد. ونظراً لأن درجة الموجه أقل من عدد المعادلات في النموذج ناقصاً واحد، لذلك نقول أن دالة الطلب هي دون مستوى التحديد. وإذا أردنا تحديد دالة العرض لأخذنا العمودين الأول والرابع من المصفوفة A لأن هذه الأعمدة تحتوي على الصفر في الصف الثاني، فنحصل على المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 1 & -a_2 \\ 0 & -0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ونظراً لأن هذه المصفوفة غير مربعة (Not square)، ولإيجاد درجة هذه المصفوفة علينا إيجاد درجة المصفوفة الفرعية (Submatrix) وهي في هذه الحالة من ترتيب 2×2، وهنا نلاحظ أن المحدد للمصفوفة الفرعية لا يساوي صفراً، بمعنى أن درجة هذه المصفوفة يساوي 2. ونظراً لأن هذا النموذج يحتوي على ثلاثة معادلات وبالتالي فإن درجة المصفوفة يساوي إلى عدد المعادلات ناقصاً واحد لذلك نقول بأن دالة العرض محددة تماماً. وأخيراً تجدر الإشارة، إلى أنه إذا كانت درجة المصفوفة أكبر من عدد المعادلات ناقصاً واحد لقلنا حينئذٍ أن المعادلة هي فوق مستوى التحديد[1].

تقدير معالم النموذج:

سبق وأن ذكرنا بأن أية معادلة في نموذج من المعادلات الهيكلية قد تكون محددة تماماً، أو فوق مستوى التحديد أو دون مستوى التحديد. ولا شك بأن

(1) Wonnacott & Wonnacott, PP: 355-356.

اختلاف طبيعة هذه الدوال يقضي استخدام طرقاً مختلفة في تقدير معالم النموذج . وهنا نلاحظ أنه بالنسبة للمعادلة غير المحددة (Under Identified or Unidentified) فإنه لا يوجد طريقة لتحديد المعالم فيها . أما إذا كانت المعادلة محددة تماماً (Exactly Identified) فباستطاعة الباحث استخدام طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS: Indirect least squares) أو استخدام طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين (2SLS: Two-Stage least squares)، في تقدير المعالم الهيكلية للنموذج . علماً أن الطريقتين تعطيان نفس النتيجة، لكن تتميز طريقة (2SLS) على طريقة (ILS)، في تقدير المعالم الهيكيلية للمعادلة المحددة تماماً، في أن طريقة (2SLS) تمكن الباحث من احتساب الخطأ المعياري للتقدير (The standard error of the estimated structural parameters) .

دعنا نفترض أنه لدينا النموذج الآتي لتوازن السوق:

$$Q_d = a_0 + a_1P + a_2Y + U_1 \quad (1)$$

$$Q_S = b_0 + b_1P + b_2T + U_2 \quad (2)$$

علماً أن:

$$Q_d = Q_S = Q \quad (3)$$

نلاحظ في هذا النموذج الإقتصادي أن كلاً من معادلتي العرض والطلب محددة تماماً . ويمكن للباحث تقدير المعالم الهيكلية باستخدام طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS)، ويتم ذلك بتحويل نموذج المعادلات أعلاه إلى نموذج تكون المتغيرات الداخلية فيه دالة فقط بالمتغيرات المحددة مسبقاً (Predetermined variables)، علماً أن المتغيرات المحددة مسبقاً هي المتغيرات الخارجية والمتغيرات الداخلية التي تعود لفترات سابقة. أي يتوجب على الباحث الحصول على نموذج تكون فيه Q دالة بالمتغيرات الخارجية Y و T وتكون فيه P أيضا دالة بالمتغيرات الخارجية Y و T.

دعنا نستبدل قيمة P في المعادلة (1) بقيمتها من المعادلة (2):

$$Q = a_0 + a_1 \left[\frac{Q - b_0 - b_2T - U_2}{b_1}\right] + a_2Y + U_1$$

$$Q = \left(\frac{a_0b_1 - a_1b_0}{b_1 - a_1}\right) + \left(\frac{b_1a_2}{b_1 - a_1}\right) Y + \left(\frac{-a_1b_2}{b_1 - a_1}\right) T + \left(\frac{b_1U_1 - a_1U_2}{b_1 - a_1}\right) \quad (4)$$

ودعنا الآن نستبدل Q في المعادلة (1) بقيمتها من المعادلة (2):

$$b_0 + b_1P + b_2T + U_2 = a_0 + a_1P + a_2Y + U_1$$

$$P = \left(\frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1}\right) + \left(\frac{a_2}{b_1 - a_1}\right) Y + \left(\frac{-b_2}{b_1 - a_1}\right) T + \left(\frac{U_1 - U_2}{b_1 - a_1}\right) \quad (5)$$

علماً أن المعادلتين (4) و (5) هي المعادلات المطلوبة حيث نجد أن المتغير الداخلي Q هو دالة في المتغيرات الخارجية Y و T، كذلك فإن المتغير الداخلي P هو دالة في المتغيرات الخارجية Y و T. ويمكن صياغة المعادلتين (4) و (5) بشكل مبسط كالآتي:

$$Q = \pi_0 + \pi_1Y + \pi_2T + V_1$$

$$P = \pi_3 + \pi_4Y + \pi_5T + V_2$$

علماً أن:

$$\pi_0 = \frac{a_0b_1 - a_1b_0}{b_1 - a_1}, \qquad \pi_1 = \frac{b_1a_2}{b_1 - a_1},$$

$$\pi_2 = \frac{-a_1b_2}{b_1 - a_1}, \qquad \pi_3 = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1},$$

$$\pi_4 = \frac{a_2}{b_1 - a_1}, \qquad \pi_5 = \frac{-b_2}{b_1 - a_1},$$

$$V_1 = \frac{b_1u_1 - a_1u_2}{b_1 - a_1}, \qquad V_2 = \frac{U_1 - U_2}{b_1 - a_1},$$

ويمكننا الحصول على المعالم لنموذج المعادلات الهيكلية كالآتي:

$$\pi_2 = \frac{-a_1 b_2}{b_1 - a_1}$$

$$a_1 = \frac{\pi_2(b_1 - a_1)}{-b_2} = \pi_2 \cdot \frac{1}{\pi_5} = \frac{\pi_2}{\pi_5}$$

$$\pi_1 = \frac{b_1 a_2}{b_1 - a_1}$$

$$b_1 = \frac{\pi_1(b_1 - a_1)}{a_2} = \pi_1 \cdot \frac{1}{\pi_4} = \frac{\pi_1}{\pi_4}$$

$$\pi_4 = \frac{a_2}{b_1 - a_1}$$

$$a_2 = \pi_4 (b_1 - a_1) = \pi_4 \left(\frac{\pi_1}{\pi_4} - \frac{\pi_2}{\pi_5}\right)$$

$$\pi_5 = \frac{-b_2}{b_1 - a_1}$$

$$b_2 = -\pi_5 (b_1 - a_1) = \pi_5 \left(\frac{\pi_2}{\pi_5} - \frac{\pi_1}{\pi_4}\right)$$

$$\pi_3 = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1}$$

$$a_0 = \pi_3 (b_1 - a_1) + b_0$$

$$\pi_0 = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 - a_1}$$

$$\pi_0 = \frac{b_1[\pi_3(b_1 - a_1) + b_0] - a_1 b_0}{b_1 - a_1}$$

$$\pi_0 = \frac{b_1 \pi_3 (b_1 - a_1) + b_1 b_0 - a_1 b_0}{b_1 - a_1} = b_1 \pi_3 + b_0$$

$$b_0 = \pi_0 - b_1 \pi_3 = \pi_0 - \frac{\pi_1}{\pi_4} \pi_3 = \pi_3 \left(\frac{\pi_0}{\pi_3} - \frac{\pi_1}{\pi_4}\right)$$

$$a_0 = \pi_3 \left(\frac{\pi_0}{\pi_3} - \frac{\pi_2}{\pi_5}\right)$$

أي يتوجب على الباحث أن يأخذ إنحدار المتغير Q على المتغيرات الخارجية Y و T للحصول على π_0، π_1، π_2، ثم يأخذ إنحدار المتغير P على المتغيرات Y و T للحصول على π_3، π_4 و π_5، فيصبح بإمكانه حينئذٍ الحصول على المعالم a_0، a_1، b_1، b_2، بإستخدام معالم النموذج المصغر.

لا شك أن طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS) هي طريقة صعبة من ناحية، كما وأنها لا تمكّن الباحث من الحصول على الخطأ المعياري للتقدير، ويفضل عليها طبعاً طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين (2SLS).

فلتحديد دالة الطلب مثلاً، نأخذ المتغير الداخلي P دالة في المتغيرات الخارجية Y و T في المرحلة الأولى:

$$\hat{P} = C_0 + C_1Y + C_2T$$

ثم نأخذ المتغير الداخلي Q دالة في المتغيرات $\hat{P}$ و Y في المرحلة الثانية فنحصل على:

$$Q = a_0 + a_1\hat{P} + a_2Y$$

أما دالة العرض فيتم تحديدها على مرحلتين أيضاً، حيث نأخذ المتغير P دالة في Y و T في المرحلة الأولى ثم نأخذ Q دالة في $\hat{P}$ و T في المرحلة الثانية.

وتجدر الإشارة أخيراً إلى أن (2SLS) أفضل من (ILS) لأن (2SLS) تمكن الباحث من الحصول على الخطأ المعياري للتقدير، كما وأن (2SLS) تصلح لتقدير المعالم الهيكلية للمعادلات المحددة تماماً وللمعادلات التي تعاني من مشكلة فوق التحديد، في حين أن طريقة (ILS) تصلح فقط للمعادلات المحددة تماماً.

أمثلة تطبيقية:

مثال (1): نموذج لتحديد مستوى الدخل القومي في المغرب:

يوضح الجدول رقم (1) البيانات الزمنية لكلٍ من عرض النقود (M) بالمليون درهم، والدخل القومي الإجمالي بسعر السوق (Y = GNP) بالمليون درهم، والانفاق الحكومي ـ الاستهلاكي والاستثماري ـ (G) بالمليون درهم[1]، للفترة 1976 - 1968 في المغرب.

دعنا نفترض نموذج بسيطاً للدخل القومي كالآتي:

$$Y_t = a_0 + a_1M_t + a_2G_t + U_{1t} \quad (1)$$

$$M_t = b_0 + b_1Y_t + U_{2t} \quad (2)$$

---

(1) تم الحصول على البيانات الموضحة في الجدول رقم (1) من المصادر الآتية:
- الأمم المتحدة، المجلس الاقتصادي والاجتماعي، ـ اللجنة الاقتصادية لغربي آسيا «المجموعة الإحصائية للعالم العربي» الدورة الرابعة ـ عمان، الأردن عام 1977 ص ص: 36، و 8، و5.

— International Financial Statistics, April 1979, PP:260 - 262.

الجدول رقم (1)

عرض النقود (M_t) بالمليون درهم، الدخل القومي بسعر السوق (Y_t) بالمليون درهم، والإنفاق الحكومي (G_t) بالمليون درهم في المغرب للفترة 1968-1976

M	Y	G	السنة
4688	15360	4810	1968
5196	16110	4320	1969
5545	17150	5130	1970
6208	18900	5470	1971
7336	20600	5530	1972
8585	22080	5720	1973
10872	28110	8410	1974
12839	31820	12590	1975
15168	37710	19870	1976
M: 8493	**23093.33**	**7983.3**	الوسط الحسابي
S: 3703.21	**7775.69**	**5145.22**	الانحراف المعياري

نلاحظ في نموذج تحديد مستوى الدخل القومي في المغرب أن الدخل Y، يتحدد بكلٍ من عرض النقود (M) والانفاق الحكومي (G)، في حين أن عرض النقود (M) يتحدد بالدخل (Y). ونظراً لأن هذا النموذج يتضمن متغيرات

تُعامل تارةً على أنها متغيرات داخلية (Endogenous variables)، وتُعامل تارةً أُخرى (في معادلة أخرى) على أنها متغيرات خارجية (Exogenous variables)، لذلك فإن النموذج المكوّن من المعادلتين (1) و (2) هو نموذج من المعادلات الآنية (Simultaneous equations model) الذي يحتوي على علاقات عكسية (Reciprocal causation) بين المتغيرات.

نلاحظ في النموذج أعلاه أن المتغير العشوائي U_{2t}، يقيس أثر المتغيرات الأخرى (التي لم تدخل بشكل صريح في النموذج) على M، كذلك فإن M تحدد Y، وبالتالي نخلص إلى أن U_{2t} تحدد Y. وبمعنى أدق نلاحظ وجود علاقة بين الخطأ العشوائي U_{2t}، وبين المتغير الخارجي Y في المعادلة (2)، وهذا بالطبع يُحد من استعمال طريقة المربعات الصغرى في تقدير المعالم الهيكلية للنموذج، لأن وجود علاقة بين الخطأ العشوائي وبين المتغير المستقل يتنافى مع فرضيات الخطأ العشوائي في تحليل الانحدار، وعلينا أن نستخدم طريقة أخرى، - غير طريقة المربعات الصغرى - في تقدير معالم النموذج للحصول على تقديرات غير متحيزة.

لا شك أنه حتى نتمكن من استخدام الطريقة الملائمة لتقدير معالم النموذج، علينا قبل كل شيء تعيين فيما إذا كانت المعادلة الهيكلية في النموذج محددة أو غير محددة. وهنا نلاحظ أن المعادلة (2)، الخاصة بعرض النقود M (Money supply)، هي معادلة محددة تماماً (Exactly Identified)، لأنها تستبعد (Excludes) متغير خارجي واحد G، بينما تتضمن (Includes) متغيرين داخليين M و Y، وبما أن المتغيرات الخارجية الموجودة في النموذج، والمستبعدة من المعادلة، يساوي إلى عدد المتغيرات الداخلية في المعادلة ناقصاً واحد، لذلك فإن المعادلة M محددة تماماً. أما المعادلة Y، فهي لا تستبعد أي متغير خارجي لذلك فهي غير محددة (Unidentified)، ولا يمكن تقدير المعالم فيها.

نظراً لأن المعادلة M محددة تماماً، فباستطاعتنا استخدام طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (1LS)، أو استخدام طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين (2SLS)، في تقدير المعالم للمعادلة، علماً أن الطريقتين تعطيان نفس النتيجة، لكن يُفضل عادة استخدام طريقة (2SLS) لأنها أبسط وتمكّن الباحث من الحصول على الخطأ المعياري للتقدير.

(أ) تقدير معالم النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS):

علينا في هذه الطريقة أن نحوّل نموذج المعادلات الهيكلية في المعادلات (1) و (2)، إلى نموذج مصغر (Reduced form)، نعبّر فيه عن كل متغير داخلي في شكل دالة للمتغيرات الخارجية فقط، كالآتي:

$$Y = a_0 + a_1M + a_2G + U_1 \qquad (1)$$

$$M = b_0 + b_1Y + U_2 \qquad (2)$$

دعنا نستبدل M في المعادلة (1) بقيمتها من المعادلة (2):

$$Y = a_0 + a_1(b_0 + b_1Y + U_2) + a_2G + U_1$$

$$Y = \left(\frac{a_1b_0 + a_0}{1 - a_1b_1}\right) + \left(\frac{a_2}{1 - a_1b_1}\right)G + \left(\frac{a_1U_2 + U_1}{1 - a_1b_1}\right) \qquad (3)$$

دعنا نستبدل Y في المعادلة (2) بقيمتها من المعادلة(1):

$$M = b_0 + b_1(a_0 + a_1M + a_2G + U_1) + U_2$$

$$M = \left(\frac{b_0 + b_1a_0}{1 - b_1a_1}\right) + \left(\frac{b_1a_2}{1 - b_1a_1}\right)G + \left(\frac{b_1U_1 + U_2}{1 - b_1a_1}\right) \qquad (4)$$

علماً أن المعادلات (3) و (4) هي معادلات النموذج المصغر المطلوبة، حيث

نُعبّر فيها عن كل متغير داخلي في شكل دالة بالمتغير الخارجي، وبالتالي فإن:

$$Y = \pi_0 + \pi_1 G + V_1$$

$$M = \pi_2 + \pi_3 G + V_2$$

ويمكننا الحصول على المعاملات b_0 و b_1 لمعادلة عرض النقود كالآتي:

$$\pi_3 = \frac{b_1 a_2}{1 - b_1 a_1} \quad ، \quad b_1 = \frac{\pi_3(1 - b_1 a_1)}{a_2}$$

$$b_1 = \frac{\pi_3(1 - b_1 a_1)}{\pi_1(1 - b_1 a_1)} = \frac{\pi_3}{\pi_1}$$

$$\pi_2 = \frac{b_0 + b_1 a_0}{1 - b_1 a_1}$$

$$b_0 = \pi_2(1 - b_1 a_1) - b_1 a_0$$

$$\pi_0 = \frac{a_1 b_0 + a_0}{1 - a_1 b_1} \quad ، \quad a_0 = \pi_0(1 - b_1 a_1) - a_1 b_0$$

$$b_0 = \pi_2(1 - b_1 a_1) - b_1[\pi_0(1 - b_1 a_1) - a_1 b_0]$$

$$b_0 = (1 - b_1 a_1)(\pi_2 - b_1 \pi_0) + b_1 a_1 b_0$$

$$b_0(1 - b_1 a_1) = (1 - b_1 a_1)(\pi_2 - b_1 \pi_0) = \pi_2 - b_1 \pi_0$$

وباستخدام البيانات الموضحة في الجدول رقم (1) نحصل على:

$$Y = F(G)$$

$$\hat{Y} = 11705.02 + 1.4265\ G \quad ، \quad R^2 = 0.891$$

$$M = F(G)$$

$$\hat{M} = 3166,03854 + 0.66726\ G \quad ، \quad R^2 = 0.8595$$

إذن :

$$b_1 = \frac{\pi_3}{\pi_1} = \frac{0.66726}{1.4265} = 0.46776$$

$$b_0 = \pi_2 - b_1\pi_0$$

$$b_0 = 3166.03854 - (0.46776)\ (11705.02) = -2309.10$$

وبذلك نخلص إلى أن عرض النقود في المغرب دالة في الدخل القومي، وفق المعادلة الآتية:

$$M = -2309.10 + 0.46776\ Y$$

(ب) تقدير معالم النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين (2SLS):

حيث نأخذ في المرحلة الأولى الدخل Y دالة للانفاق الحكومي G، وباستخدام بيانات الجدول رقم (1) نحصل على:

$$Y = F(G)$$

$$\hat{Y} = 11705.015 + 1.4265\ G \quad , \quad R^2 = 0.891$$

ثم نأخذ في المرحلة الثانية عرض النقود M دالة في القيم المتوقعة $\hat{Y}$ للدخل القومي، فنحصل على:

$$M = F(\hat{Y})$$

$$\hat{M} = -2309.10 + 0.46776\ \hat{Y}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها باستخدام الطريقة الأولى، علماً أن R^2 للنموذج الأخير تساوي $R^2 = 0.86$.

مثال (2): نموذج لتوازن سوق المواد الغذائية في السعودية:

دعنا نفترض أن النموذج البسيط الآتي والمتضمن لدالتي العرض والطلب، يمثل نموذج لتوازن السوق في السعودية للمواد الغذائية:

دالة الطلب: (1) $Q_{dt} = a_0 + a_1P_t + a_2Y_t + U_1$

دالة العرض: (2) $Qs_t = b_0 + b_1P_t + b_2T + U_2$

علماً أن:

$$Q_d = Q_S = Q_t$$

حيث ترمز Q_t إلى الرقم القياسي لمجموع الإنتاج الغذائي (Index numbers of food production)، وترمز P_t إلى الأرقام القياسية لأسعار المواد الغذائية (Price index numbers of food stuff)، مفترضين أنه خلال كل سنة يتكافؤ العرض والطلب $Q_S = Q_d = Q_t$ عند سعر التوازن P_t. وتمثل Y_t الدخل القومي المتاح للفرد الواحد بالألف ريال (Per capita disposable income)، أما T فتمثل الزمن (Time).

يوضح الجدول رقم (2) البيانات عن Q_t، P_t، Y_t و T في السعودية للفترة 1970-1979، حيث اعتبرت السنة 1975 سنة أساس للأرقام القياسية (1975 = 100)[1]:

(1) اللجنة الاقتصادية لغربي آسيا، «المجموعة الإحصائية لمنطقة اللجنة الاقتصادية لغربي آسيا 1970-1979»، العدد الرابع، بيروت 1981.

الجدول رقم (2)

الرقم القياسي لمجموع الانتاج الغذائي Q_t، الرقم القياسي لأسعار المواد الغذائية P_t، الدخل المتاح للفرد الواحد Y_t، الزمن T في السعودية للفترة 1970-1979

Q_t	P_t	Y_t	T
63	58.5	1.969	1
81	60.1	2.446	2
52	61.1	2.861	3
66	70.8	4.007	4
93	83.4	11.049	5
100	100.0	16.389	6
95	123.0	20.858	7
107	149.1	25.166	8
101	145.5	25.3602	9
103	149.7	26.6917	10
M: 86.1	**100.121**	**13.67969**	**5.5**
S: 19.41048	**38.64**	**10.4212**	**3.0277**

نلاحظ في نموذج توازن السوق للمواد الغذائية في السعودية أن كلاً من دالتي العرض والطلب محددة تماماً (Exactly identified)، لأن كلاً من هاتين

المعادلتين تستبعد متغيراً خارجياً واحداً وتتضمن متغيرين داخليين، لذلك فباستطاعتنا استخدام طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS) أو طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين (2SLS) لتقدير المعالم لنموذج المعادلات الهيكلية. علماً أن طريقة (2SLS) أفضل من (ILS) لأنها كما ذكرنا سابقاً تمكننا من الحصول على الخطأ المعياري للتقدير كما وأنه يمكن استخدامها إذا كانت المعادلة محددة تماماً أو كانت فوق مستوى التحديد. على الرغم من أن طريقة (2SLS) هي الأفضل إلا أننا سنستخدم الطريقتين بهدف الشرح.

(أ) تقدير معالم النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS):

$$Q_t = a_0 + a_1P_t + a_2Y_t + U_{1t} \quad (1)$$

$$Q_t = b_0 + b_1P_t + b_2T + U_t \quad (2)$$

وباستبدال P_t في المعادلة (1) بقيمتها من المعادلة (2)، وباستبدال Q في المعادلة (2) بقيمتها من المعادلة (1) نحصل على النموذج المصغر الآتي:

$$Q_t = \left(\frac{a_0b_1 - a_1b_0}{b_1 - a_1}\right) + \left(\frac{a_2b_1}{b_1 - a_1}\right)Y_t + \left(\frac{-a_1b_2}{b_1 - a_1}\right)T$$

$$+ \left(\frac{b_1u_1 - a_1u_2}{b_1 - a_1}\right)$$

$$P_t = \left(\frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1}\right) + \left(\frac{a_2}{b_1 - a_1}\right)Y_t + \left(\frac{-b_2}{b_1 - a_1}\right)T + \left(\frac{U_1 - U_2}{b_1 - a_1}\right)$$

$$Q_t = \pi_0 + \pi_1Y_t + \pi_2T + V_1$$

$$P_t = \pi_3 + \pi_4Y_t + \pi_5T + V_2$$

وباستخدام البيانات الموضحة في الجدول رقم (2) نحصل على:

$$Q = 69.60 + 2.6721Y - 3.6455T$$

$$R^2 = 0.80$$

$$P = 48.065 + 3.3537Y + 1.1231T$$

$$R^2 = 0.9805$$

إذن:

$$a_1 = \frac{\pi_2}{\pi_5} = -3.2459 \quad , \quad b_1 = \frac{\pi_1}{\pi_4} = 0.79676$$

$$a_2 = \pi_4(b_1 - a_1) = \pi_4(\frac{\pi_1}{\pi_4} - \frac{\pi_2}{\pi_5}) = 13.558,$$

$$b_2 = -\pi_5(b_1 - a_1) = \pi_5(\frac{\pi_2}{\pi_5} - \frac{\pi_1}{\pi_4}) = -4.54,$$

$$a_0 = \pi_3(b_1 - a_1) + b_0 = \pi_3(\frac{\pi_0}{\pi_3} - \frac{\pi_2}{\pi_5}) = 225.614,$$

$$b_0 = -\pi_3(b_1 - a_1) + a_0 = \pi_3(\frac{\pi_0}{\pi_3} - \frac{\pi_1}{\pi_4}) = 31.30,$$

وبذلك نخلص إلى أن دالة الطلب على المواد الغذائية هي:

$$Q_t = 225.614 - 3.2459\ P + 13.558\ Y$$

كما وأن دالة عرض المواد الغذائية هي:

$$Q = 31.30 + 0.79676\ P - 4.54\ T$$

(ب) استخدام طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين لتقدير معالم النموذج:

المرحلة الأولى: وفيها يُعامل المتغير الداخلي P على أنه دالة بالمتغيرات الخارجية Y وT. وباستخدام البيانات الموضحة في الجدول رقم (2) نحصل على:

$$\hat{P} = 48.065 + 3.3537\ Y + 1.1231\ T$$

$$R^2 = 0.9805$$

المرحلة الثانية: وفيها نأخذ Q_t على أنها دالة في $\hat{P}$ والمتغير الخارجي المتعلق بالمعادلة قيد الدرس. وباستخدام البيانات الموضحة في الجدول رقم (2) نحصل على:

دالة العرض:

$$Q_t = 31.289 + 0.7968\ \hat{P} - 4.5393\ T$$

$$R^2 = 0.80$$

دالة الطلب:

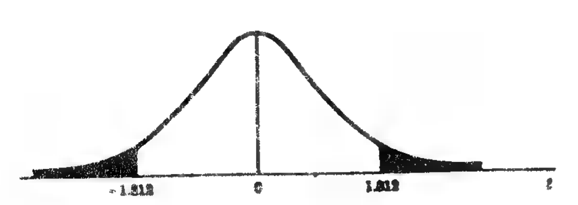
$$Q_t = 225.142 - 3.236\ \hat{P} + 13.52\ Y$$

$$R^2 = 0.80$$

وهي نفس القيم التي حصلنا عليها بالطريقة الأولى.

الجداول الإحصائية

Percentage Points of the *t* Distribution



Example

For $\phi = 10$ degrees of freedom:

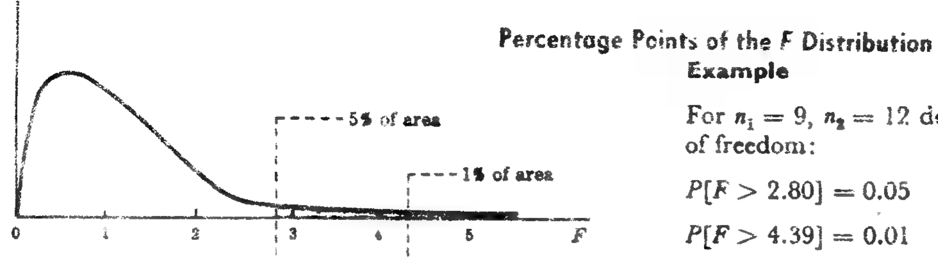
$P[t > 1.812] = 0.05$

$P[t < -1.812] = 0.05$

ϕ \ α	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.01	.005	.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	.765	.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	.741	.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.727	.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	.718	.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.711	.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	.706	.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.703	.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.700	.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.697	.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.695	.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	.694	.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.692	.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.691	.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.690	.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.689	.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.688	.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.688	.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	.687	.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.686	.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.686	.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.685	.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	.685	.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.397	3.745
25	.684	.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.684	.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.684	.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.683	.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.683	.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.683	.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.681	.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.679	.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.677	.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.674	.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

المصدر:

Yamane Taro., «Statistics». 3rd ed., Harpper and Raw publishers., Inc., N.Y., 1973 p : 1080.



Percentage Points of the F Distribution

Example

For $n_1 = 9$, $n_2 = 12$ degrees of freedom:

$P[F > 2.80] = 0.05$

$P[F > 4.39] = 0.01$

5% (Roman Type) and 1% (**Bold Face Type**) Points for the Distribution of F

n_2	n_1 degrees of freedom (for greater mean square)																								n_2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254	1
	4,052	**4,999**	**5,403**	**5,625**	**5,764**	**5,859**	**5,928**	**5,981**	**6,022**	**6,056**	**6,082**	**6,106**	**6,142**	**6,169**	**6,208**	**6,234**	**6,258**	**6,286**	**6,302**	**6,323**	**6,334**	**6,352**	**6,361**	**6,366**	
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.36	19.37	19.38	19.39	19.40	19.41	19.42	19.43	19.44	19.45	19.46	19.47	19.47	19.48	19.49	19.49	19.50	19.50	2
	98.49	**99.00**	**99.17**	**99.25**	**99.30**	**99.33**	**99.34**	**99.36**	**99.38**	**99.40**	**99.41**	**99.42**	**99.43**	**99.44**	**99.45**	**99.46**	**99.47**	**99.48**	**99.48**	**99.49**	**99.49**	**99.49**	**99.50**	**99.50**	
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.84	8.81	8.78	8.76	8.74	8.71	8.69	8.66	8.64	8.62	8.60	8.58	8.57	8.56	8.54	8.54	8.53	3
	34.12	**30.82**	**29.46**	**28.71**	**28.24**	**27.91**	**27.67**	**27.49**	**27.34**	**27.23**	**27.13**	**27.05**	**26.92**	**26.83**	**26.69**	**26.60**	**26.50**	**26.41**	**26.35**	**26.27**	**26.23**	**26.18**	**26.14**	**26.12**	
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.93	5.91	5.87	5.84	5.80	5.77	5.74	5.71	5.70	5.68	5.66	5.65	5.64	5.63	4
	21.20	**18.00**	**16.69**	**15.98**	**15.52**	**15.21**	**14.98**	**14.80**	**14.66**	**14.54**	**14.45**	**14.37**	**14.24**	**14.15**	**14.02**	**13.93**	**13.83**	**13.74**	**13.69**	**13.61**	**13.57**	**13.52**	**13.48**	**13.46**	
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74	4.70	4.68	4.64	4.60	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.42	4.40	4.38	4.37	4.36	5
	16.26	**13.27**	**12.06**	**11.39**	**10.97**	**10.67**	**10.45**	**10.27**	**10.15**	**10.05**	**9.96**	**9.89**	**9.77**	**9.68**	**9.55**	**9.47**	**9.38**	**9.29**	**9.24**	**9.17**	**9.13**	**9.07**	**9.04**	**9.02**	
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.96	3.92	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.72	3.71	3.69	3.68	3.67	6
	13.74	**10.92**	**9.78**	**9.15**	**8.75**	**8.47**	**8.26**	**8.10**	**7.98**	**7.87**	**7.79**	**7.72**	**7.60**	**7.52**	**7.39**	**7.31**	**7.23**	**7.14**	**7.09**	**7.02**	**6.99**	**6.94**	**6.90**	**6.88**	
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.60	3.57	3.52	3.49	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.29	3.28	3.25	3.24	3.23	7
	12.25	**9.55**	**8.45**	**7.85**	**7.46**	**7.19**	**7.00**	**6.84**	**6.71**	**6.62**	**6.54**	**6.47**	**6.35**	**6.27**	**6.15**	**6.07**	**5.98**	**5.90**	**5.85**	**5.78**	**5.75**	**5.70**	**5.67**	**5.65**	
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.31	3.28	3.23	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05	3.03	3.00	2.98	2.96	2.94	2.93	8
	11.26	**8.65**	**7.59**	**7.01**	**6.63**	**6.37**	**6.19**	**6.03**	**5.91**	**5.82**	**5.74**	**5.67**	**5.56**	**5.48**	**5.36**	**5.28**	**5.20**	**5.11**	**5.06**	**5.00**	**4.96**	**4.91**	**4.88**	**4.86**	
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.10	3.07	3.02	2.98	2.93	2.90	2.86	2.82	2.80	2.77	2.76	2.73	2.72	2.71	9
	10.56	**8.02**	**6.99**	**6.42**	**6.06**	**5.80**	**5.62**	**5.47**	**5.35**	**5.26**	**5.18**	**5.11**	**5.00**	**4.92**	**4.80**	**4.73**	**4.64**	**4.56**	**4.51**	**4.45**	**4.41**	**4.36**	**4.33**	**4.31**	
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.94	2.91	2.86	2.82	2.77	2.74	2.70	2.67	2.64	2.61	2.59	2.56	2.55	2.54	10
	10.04	**7.56**	**6.55**	**5.99**	**5.64**	**5.39**	**5.21**	**5.06**	**4.95**	**4.85**	**4.78**	**4.71**	**4.60**	**4.52**	**4.41**	**4.33**	**4.25**	**4.17**	**4.12**	**4.05**	**4.01**	**3.96**	**3.93**	**3.91**	
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.86	2.82	2.79	2.74	2.70	2.65	2.61	2.57	2.53	2.50	2.47	2.45	2.42	2.41	2.40	11
	9.65	**7.20**	**6.22**	**5.67**	**5.32**	**5.07**	**4.88**	**4.74**	**4.63**	**4.54**	**4.46**	**4.40**	**4.29**	**4.21**	**4.10**	**4.02**	**3.94**	**3.86**	**3.80**	**3.74**	**3.70**	**3.66**	**3.62**	**3.60**	

TABLE F (continued)

5% (Roman Type) and 1% (Bold Face Type) Points for the Distribution of F

n_2	n_1 degrees of freedom (for greater mean square)																								n_2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
12	4.75 **9.33**	3.88 **6.93**	3.49 **5.95**	3.26 **5.41**	3.11 **5.06**	3.00 **4.82**	2.92 **4.65**	2.85 **4.50**	2.80 **4.39**	2.76 **4.30**	2.72 **4.22**	2.69 **4.16**	2.64 **4.05**	2.60 **3.98**	2.54 **3.86**	2.50 **3.78**	2.46 **3.70**	2.42 **3.61**	2.40 **3.56**	2.36 **3.49**	2.35 **3.46**	2.32 **3.41**	2.31 **3.38**	2.30 **3.36**	12
13	4.67 **9.07**	3.80 **6.70**	3.41 **5.74**	3.18 **5.20**	3.02 **4.86**	2.92 **4.62**	2.84 **4.44**	2.77 **4.30**	2.72 **4.19**	2.67 **4.10**	2.63 **4.02**	2.60 **3.96**	2.55 **3.85**	2.51 **3.78**	2.46 **3.67**	2.42 **3.59**	2.38 **3.51**	2.34 **3.42**	2.32 **3.37**	2.28 **3.30**	2.26 **3.27**	2.24 **3.21**	2.22 **3.18**	2.21 **3.16**	13
14	4.60 **8.86**	3.74 **6.51**	3.34 **5.56**	3.11 **5.03**	2.96 **4.69**	2.85 **4.46**	2.77 **4.28**	2.70 **4.14**	2.65 **4.03**	2.60 **3.94**	2.56 **3.86**	2.53 **3.80**	2.48 **3.70**	2.44 **3.62**	2.39 **3.51**	2.35 **3.43**	2.31 **3.34**	2.27 **3.26**	2.24 **3.21**	2.21 **3.14**	2.19 **3.11**	2.16 **3.06**	2.14 **3.02**	2.13 **3.00**	14
15	4.54 **8.68**	3.68 **6.36**	3.29 **5.42**	3.06 **4.89**	2.90 **4.56**	2.79 **4.32**	2.70 **4.14**	2.64 **4.00**	2.59 **3.89**	2.55 **3.80**	2.51 **3.73**	2.48 **3.67**	2.43 **3.56**	2.39 **3.48**	2.33 **3.36**	2.29 **3.29**	2.25 **3.20**	2.21 **3.12**	2.18 **3.07**	2.15 **3.00**	2.12 **2.97**	2.10 **2.92**	2.08 **2.89**	2.07 **2.87**	15
16	4.49 **8.53**	3.63 **6.23**	3.24 **5.29**	3.01 **4.77**	2.85 **4.44**	2.74 **4.20**	2.66 **4.03**	2.59 **3.89**	2.54 **3.78**	2.49 **3.69**	2.45 **3.61**	2.42 **3.55**	2.37 **3.45**	2.33 **3.37**	2.28 **3.25**	2.24 **3.18**	2.20 **3.10**	2.16 **3.01**	2.13 **2.96**	2.09 **2.89**	2.07 **2.86**	2.04 **2.80**	2.02 **2.77**	2.01 **2.75**	16
17	4.45 **8.40**	3.59 **6.11**	3.20 **5.18**	2.96 **4.67**	2.81 **4.34**	2.70 **4.10**	2.62 **3.93**	2.55 **3.79**	2.50 **3.68**	2.45 **3.59**	2.41 **3.52**	2.38 **3.45**	2.33 **3.35**	2.29 **3.27**	2.23 **3.16**	2.19 **3.08**	2.15 **3.00**	2.11 **2.92**	2.08 **2.86**	2.04 **2.79**	2.02 **2.76**	1.99 **2.70**	1.97 **2.67**	1.96 **2.65**	17
18	4.41 **8.28**	3.55 **6.01**	3.16 **5.09**	2.93 **4.58**	2.77 **4.25**	2.66 **4.01**	2.58 **3.85**	2.51 **3.71**	2.46 **3.60**	2.41 **3.51**	2.37 **3.44**	2.34 **3.37**	2.29 **3.27**	2.25 **3.19**	2.19 **3.07**	2.15 **3.00**	2.11 **2.91**	2.07 **2.83**	2.04 **2.78**	2.00 **2.71**	1.98 **2.68**	1.95 **2.62**	1.93 **2.59**	1.92 **2.57**	18
19	4.38 **8.18**	3.52 **5.93**	3.13 **5.01**	2.90 **4.50**	2.74 **4.17**	2.63 **3.94**	2.55 **3.77**	2.48 **3.63**	2.43 **3.52**	2.38 **3.43**	2.34 **3.36**	2.31 **3.30**	2.26 **3.19**	2.21 **3.12**	2.15 **3.00**	2.11 **2.92**	2.07 **2.84**	2.02 **2.76**	2.00 **2.70**	1.96 **2.63**	1.94 **2.60**	1.91 **2.54**	1.90 **2.51**	1.88 **2.49**	19
20	4.35 **8.10**	3.49 **5.85**	3.10 **4.94**	2.87 **4.43**	2.71 **4.10**	2.60 **3.87**	2.52 **3.71**	2.45 **3.56**	2.40 **3.45**	2.35 **3.37**	2.31 **3.30**	2.28 **3.23**	2.23 **3.13**	2.18 **3.05**	2.12 **2.94**	2.08 **2.86**	2.04 **2.77**	1.99 **2.69**	1.96 **2.63**	1.92 **2.56**	1.90 **2.53**	1.87 **2.47**	1.85 **2.44**	1.84 **2.42**	20
21	4.32 **8.02**	3.47 **5.78**	3.07 **4.87**	2.84 **4.37**	2.68 **4.04**	2.57 **3.81**	2.49 **3.65**	2.42 **3.51**	2.37 **3.40**	2.32 **3.31**	2.28 **3.24**	2.25 **3.17**	2.20 **3.07**	2.15 **2.99**	2.09 **2.88**	2.05 **2.80**	2.00 **2.72**	1.96 **2.63**	1.93 **2.58**	1.89 **2.51**	1.87 **2.47**	1.84 **2.42**	1.82 **2.38**	1.81 **2.36**	21
22	4.30 **7.94**	3.44 **5.72**	3.05 **4.82**	2.82 **4.31**	2.66 **3.99**	2.55 **3.76**	2.47 **3.59**	2.40 **3.45**	2.35 **3.35**	2.30 **3.26**	2.26 **3.18**	2.23 **3.12**	2.18 **3.02**	2.13 **2.94**	2.07 **2.83**	2.03 **2.75**	1.98 **2.67**	1.93 **2.58**	1.91 **2.53**	1.87 **2.46**	1.84 **2.42**	1.81 **2.37**	1.80 **2.33**	1.78 **2.31**	22
23	4.28 **7.88**	3.42 **5.66**	3.03 **4.76**	2.80 **4.26**	2.64 **3.94**	2.53 **3.71**	2.45 **3.54**	2.38 **3.41**	2.32 **3.30**	2.28 **3.21**	2.24 **3.14**	2.20 **3.07**	2.14 **2.97**	2.10 **2.89**	2.04 **2.78**	2.00 **2.70**	1.96 **2.62**	1.91 **2.53**	1.88 **2.48**	1.84 **2.41**	1.82 **2.37**	1.79 **2.32**	1.77 **2.28**	1.76 **2.26**	23
24	4.26 **7.82**	3.40 **5.61**	3.01 **4.72**	2.78 **4.22**	2.62 **3.90**	2.51 **3.67**	2.43 **3.50**	2.36 **3.36**	2.30 **3.25**	2.26 **3.17**	2.22 **3.09**	2.18 **3.03**	2.13 **2.93**	2.09 **2.85**	2.02 **2.74**	1.98 **2.66**	1.94 **2.[illegible]**	1.89 **2.49**	1.86 **2.44**	1.82 **2.36**	1.80 **2.33**	1.76 **2.27**	1.74 **2.23**	1.73 **2.21**	24
[illegible]	4.24 **7.77**	3.38 **5.57**	2.99 **4.68**	2.76 **4.18**	2.60 **3.86**	2.49 **3.63**	2.41 **3.46**	2.34 **3.32**	2.28 **3.21**	2.24 **3.13**	2.20 **3.05**	2.16 **2.99**	2.11 **2.89**	2.06 **2.81**	2.00 **2.70**	1.96 **2.62**	1.92 **2.54**	1.87 **2.45**	1.84 **2.40**	1.80 **2.32**	1.77 **2.29**	1.74 **2.23**	1.72 **2.19**	1.71 **2.17**	25
26	4.22 [illegible]	3.37 [illegible]	2.98 [illegible]	2.74 [illegible]	2.59 [illegible]	2.47 [illegible]	2.39 [illegible]	2.32 [illegible]	2.27 **3.17**	2.22 **3.09**	2.18 **3.02**	2.15 **2.96**	2.10 **2.86**	2.05 **2.77**	1.99 **2.66**	1.95 **2.58**	1.90 **2.50**	1.85 **2.41**	1.82 **2.36**	1.78 **2.28**	1.76 **2.25**	1.72 **2.19**	1.70 **2.15**	1.69 **2.13**	26

المصدر:

Yamane Taro., «Statistics», 3rd ed., Harpper and Raw publishers., Inc., N.Y., 1973. pp : 1082-1083

The Durbin-Watson d Statistic

Significance points of d_L and d_U: 5%

n	$k'=1$		$k'=2$		$k'=3$		$k'=4$		$k'=5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.82	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

Significance points of d_L and d_U: 2.5%

n	$k'=1$		$k'=2$		$k'=3$		$k'=4$		$k'=5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	0.95	1.23	0.83	1.40	0.71	1.61	0.59	1.84	0.48	2.09
16	0.98	1.24	0.86	1.40	0.75	1.59	0.64	1.80	0.53	2.03
17	1.01	1.25	0.90	1.40	0.79	1.58	0.68	1.77	0.57	1.98
18	1.03	1.26	0.93	1.40	0.82	1.56	0.72	1.74	0.62	1.93
19	1.06	1.28	0.96	1.41	0.86	1.55	0.76	1.72	0.66	1.90
20	1.08	1.28	0.99	1.41	0.89	1.55	0.79	1.70	0.70	1.87
21	1.10	1.30	1.01	1.41	0.92	1.54	0.83	1.69	0.73	1.84
22	1.12	1.31	1.04	1.42	0.95	1.54	0.86	1.68	0.77	1.82
23	1.14	1.32	1.06	1.42	0.97	1.54	0.89	1.67	0.80	1.80
24	1.16	1.33	1.08	1.43	1.00	1.54	0.91	1.66	0.83	1.79
25	1.18	1.34	1.10	1.43	1.02	1.54	0.94	1.65	0.86	1.77
26	1.19	1.35	1.12	1.44	1.04	1.54	0.96	1.65	0.88	1.76
27	1.21	1.36	1.13	1.44	1.06	1.54	0.99	1.64	0.91	1.75
28	1.22	1.37	1.15	1.45	1.08	1.54	1.01	1.64	0.93	1.74
29	1.24	1.38	1.17	1.45	1.10	1.54	1.03	1.63	0.96	1.73
30	1.25	1.38	1.18	1.46	1.12	1.54	1.05	1.63	0.98	1.73
31	1.26	1.39	1.20	1.47	1.13	1.55	1.07	1.63	1.00	1.72
32	1.27	1.40	1.21	1.47	1.15	1.55	1.08	1.63	1.02	1.71
33	1.28	1.41	1.22	1.48	1.16	1.55	1.10	1.63	1.04	1.71
34	1.29	1.41	1.24	1.48	1.17	1.55	1.12	1.63	1.06	1.70
35	1.30	1.42	1.25	1.48	1.19	1.55	1.13	1.63	1.07	1.70
36	1.31	1.43	1.26	1.49	1.20	1.56	1.15	1.63	1.09	1.70
37	1.32	1.43	1.27	1.49	1.21	1.56	1.16	1.62	1.10	1.70
38	1.33	1.44	1.28	1.50	1.23	1.56	1.17	1.62	1.12	1.70
39	1.34	1.44	1.29	1.50	1.24	1.56	1.19	1.63	1.13	1.69
40	1.35	1.45	1.30	1.51	1.25	1.57	1.20	1.63	1.15	1.69
45	1.39	1.48	1.34	1.53	1.30	1.58	1.25	1.63	1.21	1.69
50	1.42	1.50	1.38	1.54	1.34	1.59	1.30	1.64	1.26	1.69
55	1.45	1.52	1.41	1.56	1.37	1.60	1.33	1.64	1.30	1.69
60	1.47	1.54	1.44	1.57	1.40	1.61	1.37	1.65	1.33	1.69
65	1.49	1.55	1.46	1.59	1.43	1.62	1.40	1.66	1.36	1.69
70	1.51	1.57	1.48	1.60	1.45	1.63	1.42	1.66	1.39	1.70
75	1.53	1.58	1.50	1.61	1.47	1.64	1.45	1.67	1.42	1.70
80	1.54	1.59	1.52	1.62	1.49	1.65	1.47	1.67	1.44	1.70
85	1.56	1.60	1.53	1.63	1.51	1.65	1.49	1.68	1.46	1.71
90	1.57	1.61	1.55	1.64	1.53	1.66	1.50	1.69	1.48	1.71
95	1.58	1.62	1.56	1.65	1.54	1.67	1.52	1.69	1.50	1.71
100	1.59	1.63	1.57	1.65	1.55	1.67	1.53	1.70	1.51	1.72

Significance points of d_L and d_U: 1%

n	$k'=1$		$k'=2$		$k'=3$		$k'=4$		$k'=5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	0.81	1.07	0.70	1.25	0.59	1.46	0.49	1.70	0.39	1.96
16	0.84	1.09	0.74	1.25	0.63	1.44	0.53	1.66	0.44	1.90
17	0.87	1.10	0.77	1.25	0.67	1.43	0.57	1.63	0.48	1.85
18	0.90	1.12	0.80	1.26	0.71	1.42	0.61	1.60	0.52	1.80
19	0.93	1.13	0.83	1.26	0.74	1.41	0.65	1.58	0.56	1.77
20	0.95	1.15	0.86	1.27	0.77	1.41	0.68	1.57	0.60	1.74
21	0.97	1.16	0.89	1.27	0.80	1.41	0.72	1.55	0.63	1.71
22	1.00	1.17	0.91	1.28	0.83	1.40	0.75	1.54	0.66	1.69
23	1.02	1.19	0.94	1.29	0.86	1.40	0.77	1.53	0.70	1.67
24	1.04	1.20	0.96	1.30	0.88	1.41	0.80	1.53	0.72	1.66
25	1.05	1.21	0.98	1.30	0.90	1.41	0.83	1.52	0.75	1.65
26	1.07	1.22	1.00	1.31	0.93	1.41	0.85	1.52	0.78	1.64
27	1.09	1.23	1.02	1.32	0.95	1.41	0.88	1.51	0.81	1.63
28	1.10	1.24	1.04	1.32	0.97	1.41	0.90	1.51	0.83	1.62
29	1.12	1.25	1.05	1.33	0.99	1.42	0.92	1.51	0.85	1.61
30	1.13	1.26	1.07	1.34	1.01	1.42	0.94	1.51	0.88	1.61
31	1.15	1.27	1.08	1.34	1.02	1.42	0.96	1.51	0.90	1.60
32	1.16	1.28	1.10	1.35	1.04	1.43	0.98	1.51	0.92	1.60
33	1.17	1.29	1.11	1.36	1.05	1.43	1.00	1.51	0.94	1.59
34	1.18	1.30	1.13	1.36	1.07	1.43	1.01	1.51	0.95	1.59
35	1.19	1.31	1.14	1.37	1.08	1.44	1.03	1.51	0.97	1.59
36	1.21	1.32	1.15	1.38	1.10	1.44	1.04	1.51	0.99	1.59
37	1.22	1.32	1.16	1.38	1.11	1.45	1.06	1.51	1.00	1.59
38	1.23	1.33	1.18	1.39	1.12	1.45	1.07	1.52	1.02	1.58
39	1.24	1.34	1.19	1.39	1.14	1.45	1.09	1.52	1.03	1.58
40	1.25	1.34	1.20	1.40	1.15	1.46	1.10	1.52	1.05	1.58
45	1.29	1.38	1.24	1.42	1.20	1.48	1.16	1.53	1.11	1.58
50	1.32	1.40	1.28	1.45	1.24	1.49	1.20	1.54	1.16	1.59
55	1.36	1.43	1.32	1.47	1.28	1.51	1.25	1.55	1.21	1.59
60	1.38	1.45	1.35	1.48	1.32	1.52	1.28	1.56	1.25	1.60
65	1.41	1.47	1.38	1.50	1.35	1.53	1.31	1.57	1.28	1.61
70	1.43	1.49	1.40	1.52	1.37	1.55	1.34	1.58	1.31	1.61
75	1.45	1.50	1.42	1.53	1.39	1.56	1.37	1.59	1.34	1.62
80	1.47	1.52	1.44	1.54	1.42	1.57	1.39	1.60	1.36	1.62
85	1.48	1.53	1.46	1.55	1.43	1.58	1.41	1.60	1.39	1.63
90	1.50	1.54	1.47	1.56	1.45	1.59	1.43	1.61	1.41	1.64
95	1.51	1.55	1.49	1.57	1.47	1.60	1.45	1.62	1.42	1.64
100	1.52	1.56	1.50	1.58	1.48	1.60	1.46	1.63	1.44	1.65

المصدر :

Yamane Taro., «Statistics». 3rd ed., Harpper and Raw publishers, Inc., N.Y., 1973. pp : 1096-1098.

مؤلفات الدكتور عبد الرزّاق شربجي وبحوثه

- د. عبد الرزّاق شربجي، البحث العلمي واستخدام برامج الكمبيوتر الجاهزة: Dbase III + & SPSS/PC + . دار العلم للملايين، 1990.

د. عبد الرزّاق شربجي و د. خالد الملاّ. الإحصاء الوصفي مع برامج كمبيوتر بلغة Basic، دار العلم للملايين، 1987.

- Charbaji, A.R., **Using Excel in Business Applications,** (Examples Disk is Enclosed, 1993, (in press).

- Charbaji, A.R. et al., «Predicting the Government's Decision to Seek a Rescheduling of External Debt». Journal of **Applied Economics,** London, 1993.

- Charbaji, A.R. et al., «A Discriminant Function Model for Admission at Undergraduate University level». **International Review of Education,** Netherlands, Unesco Institute of Education and Kluwer Academic Publishers, vol. 38, No. 5, 1992, p p. 505-518.

- Charbaji, A.R. et al., «Applying Factor, Cluster, and Multidiscriminant Analysis for Classifying Firms Based on Their Financial Ratios: An Application to the Gulf Banks», **Advances in Quantitative Analysis of Finance and Accounting,** U.S.A., Vol 3, 1993.

Charbaji, A.R. et al., «Applying Factor Analysis to Financial Ratios of International Commercial Airlines». **International Journal of Commerce and Management,** U.S.A., 1993.

المحتويات

	A	B	C	D	E	F
1	illustration	of the use	of cell	references :		
2	a) Formula	display				
3						
4		1	2	3	4	5
5		=B4+1	=C4+1	=D4+1	=E4+1	=F4+1
6		=B5+1	=C5+1	=D5+1	=E5+1	=F5+1
7		=B6+1	=C6+1	=D6+1	=E6+1	=F6+1
8		=B7+1	=C7+1	=D7+1	=E7+1	=F7+1
9		=B8+1	=C8+1	=D8+1	=E8+1	=F8+1
10						
11						
12		1	2	3	4	5
13		=$B$12+1	=$B$12+1	=$B$12+1	=$B$12+1	=$B$12+1
14		=$B$12+1	=$B$12+1	=$B$12+1	=$B$12+1	=$B$12+1
15		=$B$12+1	=$B$12+1	=$B$12+1	=$B$12+1	=$B$12+1
16		=$B$12+1	=$B$12+1	=$B$12+1	=$B$12+1	=$B$12+1
17		=$B$12+1	=$B$12+1	=$B$12+1	=$B$12+1	$B$12+1
18						
19						
20		1	2	3	4	
21		=B$20+1	=C$20+1	=D$20+1	=E$20+1	=F$20+1
22		=B$20+1	=C$20+1	=D$20+1	=E$20+1	[illegible]
23		=B$20+1	=C$20+1	=D$20+1	=E$20+1	=F$20+1
24		=B$20+1	=C$20+1	=D$20+1	=E$20+1	=F$20+1
25		=B$20+1	=C$20+1	=D$20+1	=E$20+1	=F$20+1
26						
27						
28		1	2	3	4	5
29		=$B28+1	=$B28+1	=$B28+1	=$B28+1	=$B28+1
30		=$B29+1	=$B29+1	=$B29+1	=$B29+1	=$B29+1
31		=$B30+1	=$B30+1	=$B30+1	=$B30+1	=$B30+1
32		=$B31+1	=$B31+1	=$B31+1	=$B31+1	=$B31+1
33		=$B32+1	=$B32+1	=$B32+1	=$B32+1	=$B32+1
34						

توزيع
دار العلم للملايين